Landesinstitut für Schulqualität
und Lehrerbildung (LISA)

DIALOG 31

ENTWICKLUNG RÄUMLICHER VORSTELLUNGEN

Aufgabensammlung für den Mathematikunterricht der Schuljahrgänge 1 bis 6

lisa.sachsen-anhalt.de

Wir sind uns unserer Verantwortung für unsere Umwelt bewusst und gehen schonend mit den natürlichen Ressourcen um. Aus diesem Grund ist die vorliegende Broschüre vollständig auf 100 % Recycling-Papier gedruckt.

IMPRESSUM

Herausgeber:	Landesinstitut für Schulqualität und Lehrerbildung Sachsen-Anhalt (LISA) Riebeckplatz 9, 06110 Halle (Saale)
Autoren:	Sabine Schmidt, Sara Neunübel, Claudia Rolle, Ralph Thielbeer, Katja Wolf, Ralf Ningler Thomas Viehweg (Kapitel 3.5 und Kapitel 3.6)
Layout:	Doreen Eckhoff
Illustrationen:	© HALBE TREPPE GmbH Halle (Saale); Doreen Eckhoff (LISA)
Fotos:	Titelbild: © Petair – stock.adobe.com Inhaltsverzeichnis: © pictworks – stock.adobe.com Seite 5: © Syda Productions – stock.adobe.com
Druck:	druckhaus köthen
ISSN:	1438 – 4787

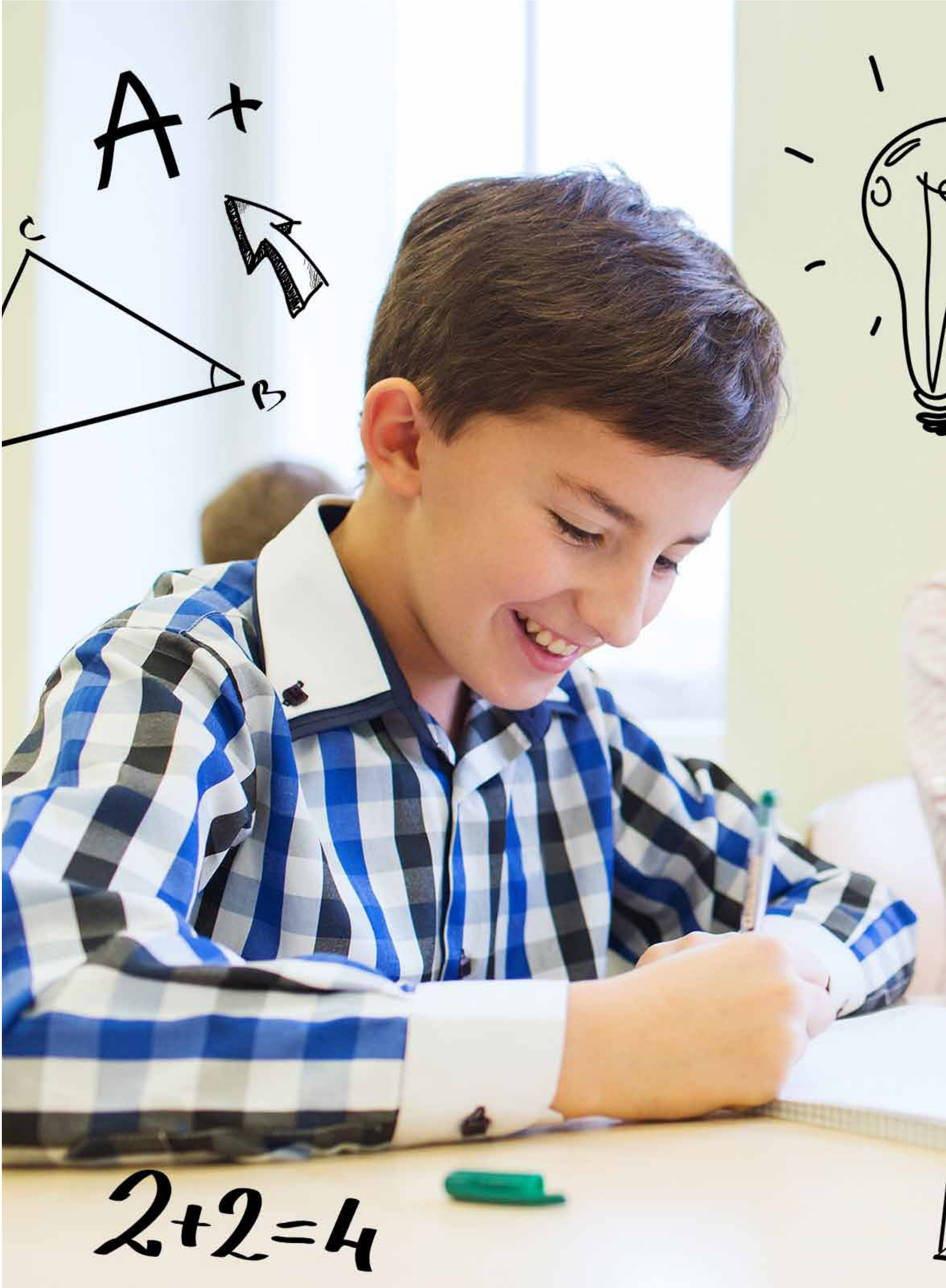
LISA Halle (Saale) 2020 – 1. Auflage – 2.300

ENTWICKLUNG RÄUMLICHER VORSTELLUNGEN

Aufgabensammlung für den Mathematikunterricht der Schuljahrgänge 1 bis 6

DIALOG 31

INHALT


A+
C
B
2+2=4

VORWORT

Das Dialogheft 31 zur **Entwicklung räumlicher Vorstellungen im Mathematikunterricht** enthält zahlreiche Aufgaben zur Kompetenzentwicklung und -überprüfung mit didaktischen Anregungen für die Schuljahrgänge 1 bis 6 sowie Ideen für die Gestaltung von Lehr- und Lernprozessen im Mathematikunterricht. Dabei orientieren sich die Aufgaben an einer Auswahl inhaltsbezogener und prozessbezogener beziehungsweise allgemeiner mathematischer Kompetenzen der Fachlehrpläne Mathematik für die Primarstufe und Sekundarstufe I und bilden exemplarisch Anforderungen an Aufgaben zur Kompetenzentwicklung und -überprüfung ab.

Vorgeschlagene **Aufgabenvarianten, Unterrichtsideen und Möglichkeiten zur Differenzierung** dienen zur Unterstützung individueller Lernprozesse der Schülerinnen und Schüler und zur Entwicklung prozessbezogener beziehungsweise allgemeiner mathematischer Kompetenzen.

Wortspeicher stellen das jeweilige Grundwissen dar, weisen auf Besonderheiten der Fachsprache hin und dienen zur Erweiterung des Wortschatzes der Schülerinnen und Schüler. Eine gezielte Anwendung mathematischer Fachbegriffe und Redewendungen unterstützt die Fähigkeit, räumliche Sachverhalte sprachlich darzustellen und fördert neben den mathematischen auch die kommunikativen Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler.

Die Kultusministerkonferenz formulierte im Jahr 2016 in dem Strategiepapier zur „Bildung in der digitalen Welt“[1] verbindlich umzusetzende Anforderungen an den Bildungsbereich. Auch die Fachlehrpläne Mathematik Grundschule und Sekundarstufe I beziehen Kompetenzen ein, die für eine **aktive, selbstbestimmte Teilhabe in der digitalen Welt** erforderlich sind.

[1] Sekretariat der Kultusministerkonferenz (KMK) (Hrsg.) (2016): Bildung in der digitalen Welt. Strategie der Kultusministerkonferenz. Berlin. Online unter: https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2018/Strategie_Bildung_in_der_digitalen_Welt_idF._vom_07.12.2017.pdf (recherchiert am 18.06.2020)

Gerade im Inhaltsbereich *Raum und Form* lassen sich zahlreiche Anwendungsbeispiele finden, die das Potenzial digitaler Medien in Bezug auf die

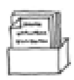
» Veranschaulichung von Unterrichtsinhalten,
» Individualisierung durch adaptive Unterrichtsformen oder
» Gestaltung kooperativer Lern- und Arbeitsprozesse[2]

nutzen und dadurch den Mathematikunterricht bereichern. Beispielhaft verwiesen sei auf die praxisorientierten Beiträge von Kuzle & Etzold, Ladel & Kuzle, Thielbeer u. a. im Anhang.

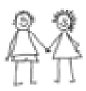
Somit ist es ein weiteres Ziel dieses Materials, Anregungen und Vorschläge zu bieten, neue Medien didaktisch sinnvoll in die Gestaltung von Lernumgebungen zur Entwicklung und Förderung räumlicher Vorstellungen in der Grundschule einzubeziehen.

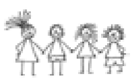
Erklärung zu den verwendeten Zeichen:

 Anregungen aus dem Netz

 Mathematischer Sprachwortschatz

☆ Aufgaben zum Entdecken und Problemlösen

 Partnerübung

 Gruppenarbeit

AFB – Anforderungsbereiche

2 vgl. Irion, T. & Scheiter, K. (2018): Didaktische Potenziale digitaler Medien für den Grundschulunterricht. Der Einsatz digitaler Technologien aus grundschuldidaktischer und mediendidaktischer Sicht. In: Grundschule aktuell, 142, S. 8 – 11.

1 EINFÜHRUNG

Die Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens ist ein wesentliches Anliegen im Mathematikunterricht.

Die Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens sollte auch deshalb bewusst in die Unterrichtsplanung einbezogen werden, da räumliches Denken häufig ein zentraler Prädiktor von Mathematikleistungen ist. Schülerinnen und Schüler, die über ein gutes Raumvorstellungsvermögen verfügen, erzielen im Mathematikunterricht oft auch bessere Leistungen (vgl. Grüßing, 2012, S. 113).

Dabei kennzeichnen drei Faktoren[3] die Ausprägung räumlicher Denkprozesse:

» Erkennen räumlicher Beziehungen und Strukturen,
» räumliche Visualisierung und
» räumliche Orientierung.

Im Folgenden werden einige Besonderheiten in den Schuljahrgängen aufgezeigt.

Primarstufe (Schuljahrgänge 1 bis 4)
Im Vorschulalter bauen sich räumliche Vorstellungen durch zahlreiche motorische Aktivitäten (Bauen, Legen, Zerlegen, Zusammensetzen, ...) auf und werden zunehmend komplexer. Erfahrungen und Lernprozesse in der Grundschule knüpfen daran an und fördern vor allem auch das mentale Operieren mit geometrischen Körpern und Bauwerken. Auf diese Weise gelingt es den Schülerinnen und Schülern zunehmend besser, Objekte aus einer anderen Perspektive bzw. nach einer Veränderung ihres Blickwinkels wahrzunehmen, einzuordnen und räumliche Beziehungen bildlich darzustellen. Für den Mathematikunterricht empfiehlt es sich, den Schülerinnen und Schülern vielfältige Anlässe für handelndes Lernen zu ermöglichen, z. B. durch Bauen, Nachbauen, ... mit geometrischen Körpern.

Sekundarstufe I (Schuljahrgänge 5 und 6)
Die in der Primarstufe erworbenen Kompetenzen zum räumlichen Vorstellungsvermögen werden in den darauffolgenden Schuljahrgängen beständig weiterentwickelt und vertieft.

[3] vgl. Merschmeyer-Brüwer, C. (2003): Raumvorstellungsvermögen entwickeln und fördern. In: Die Grundschulzeitschrift 167/2003, S. 7

Das praktisch-gegenständliche Handeln, wie zum Beispiel die Arbeit mit Körpermodellen oder das Zerlegen und Zusammensetzen von Körpern, wird ergänzt und zunehmend ersetzt durch die reine Arbeit auf der Vorstellungsebene, die der eigentliche Inhalt des Raumvorstellungsvermögens ist. Das Bewusstsein für dieses Wechselverhältnis sollte deshalb bei der Planung von Mathematikunterricht auch Berücksichtigung finden. Insbesondere müssen im Zusammenhang mit der Vorbereitung des Unterrichts die unterschiedlichen Voraussetzungen der Schülerinnen und Schüler bedacht werden, um Möglichkeiten zur Differenzierung des Anforderungsniveaus zu planen. Dabei ist der Aspekt der Zulassung oder Nichtzulassung von gegenständlichen oder zeichnerischen Veranschaulichungen bei der Bewältigung von Aufgaben bewusst zu bedenken.
In Hinblick auf die Weiterentwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens sollte immanentes Ziel des Mathematikunterrichts sein, die in der Primarstufe und zum Teil in den Schuljahrgängen 5 und 6 vorliegende Dominanz des realen Objektes zu relativieren. Beigetragen wird dazu, indem

- Merkmale einzelner Körper systematisch untersucht,
- Begriffsbeziehungen hergestellt,
- bisherige Vorstellungen zu typischen Repräsentanten verallgemeinert,
- Volumen- und Oberflächenberechnungen durchgeführt und
- Darstellungen von Körpern mit verschiedenen Verfahren vorgenommen werden.

Charakteristisch hierfür ist, dass die Abstraktion zwar dominiert, gleichwohl können aber in Phasen von Einführungen gegebenenfalls Bezüge zu realen Objekten hergestellt werden.

In Hinblick auf das räumliche Vorstellungsvermögen wird in den Schuljahrgängen 5 und 6 ein weiterer Aspekt deutlich. Die in diesem Zusammenhang im Mathematikunterricht eingesetzten Aufgaben erfahren zunehmend eine Vernetzung mit anderen Leitideen, z. B. *Messen und Funktionaler Zusammenhang,* d. h. eine Aufgabe aus dem Bereich Geometrie wird nicht zwangsläufig der Leitidee *Raum und Form* zugeordnet.

2 ANFORDERUNGEN DER FACHLEHRPLÄNE MATHEMATIK

2.1 AUSGEWÄHLTE INHALTSBEZOGENE KOMPETENZEN

Die Tabelle zeigt die für die nachfolgende Aufgabensammlung ausgewählten inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen, die bis zum Ende der Schuljahrgänge 2, 4 und 6 zu erwerben sind.

SCHULJAHRGANG 2	SCHULJAHRGANG 4	SCHULJAHRGANG 6
• mit Körpern nach Vorgabe bauen	• mit Würfeln nach Vorgabe bauen, Baupläne zuordnen und erstellen	
	• Grundrisse und Ansichten von Bauwerken und Würfelgebäuden unterscheiden und skizzieren	
	• Körpernetze erkennen, auch mithilfe digitaler Werkzeuge erstellen und untersuchen, Körpernetze vom Quader und Spezialfall Würfel abwickeln und zeichnen	• Netze und Schrägbilder von Quadern skizzieren und zeichnen
		• Oberflächeninhalt und Volumen in Sachsituationen erkennen und berechnen

2.2 AUSGEWÄHLTE PROZESSBEZOGENE BZW. ALLGEMEINE MATHEMATISCHE KOMPETENZEN

SCHULJAHRGANG 4	SCHULJAHRGANG 6
Problemlösen: inner- und außermathematische Anforderungssituationen durch bewusstes Nutzen mathematischer Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten bewältigen	**Probleme mathematisch lösen:** heuristische Regeln, Strategien oder Prinzipien nutzen
Modellieren: Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzen und innermathematisch lösen	**Modellieren:** Strukturen und Beziehungen in inner- und außermathematischen Kontexten erkennen und diese mithilfe mathematischer Begriffe und Relationen beschreiben

SCHULJAHRGANG 4	SCHULJAHRGANG 6
Kommunizieren und Argumentieren: einfache Beschreibungen und Begründungen verständlich – auch schriftlich – darstellen	**Mathematisch argumentieren und kommunizieren:** Aussagen zu mathematischen Inhalten verstehen und überprüfen
Darstellen: für das Bearbeiten mathematischer Anforderungen geeignete Darstellungen entwickeln und nutzen	**Mathematische Darstellungen und Symbole verwenden:** unterschiedliche Darstellungsformen wählen

Im Folgenden wird anhand von Beispielaufgaben gezeigt, wie das räumliche Vorstellungsvermögen und insbesondere das räumliche Denken gezielt gefördert werden können.

3 AUFGABENBEISPIELE MIT DIDAKTISCHEN ANREGUNGEN

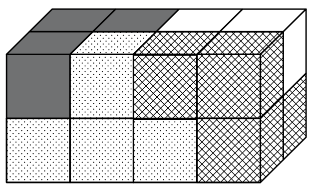
3.1 MIT KÖRPERN NACH VORGABE BAUEN (SCHULJAHRGÄNGE 1/2)

Das Bauen mit realen geometrischen Körpern fördert und fordert das **Erkennen und Nutzen räumlicher Beziehungen.** Räumliches Vorstellungsvermögen ist die Fähigkeit, mit zwei- oder dreidimensionalen Objekten auf der Vorstellungsebene zu arbeiten.
Innerhalb einer Vergleichsarbeit Schuljahrgang 3 wurde das Erkennen räumlicher Beziehungen im Bereich *Raum und Form* unter anderem mit der nebenstehenden Aufgabe getestet.

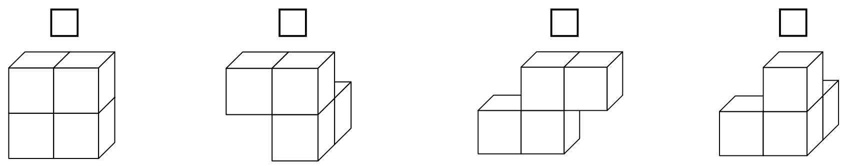
VERGLEICHSARBEIT MATHEMATIK SCHULJAHRGANG 3
SCHULJAHR 2012/2013

Aufgabe	AFB II	Lösungshäufigkeit landesweit 56 %

Der Quader besteht aus 4 verschiedenen Teilen. Jedes Teil besteht aus vier gleich großen Würfeln.



Welche Form hat das weiße Teil? Kreuze an.

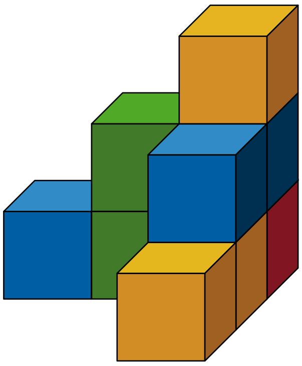
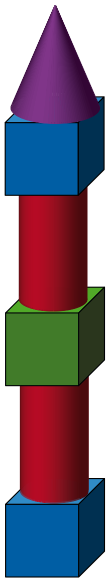
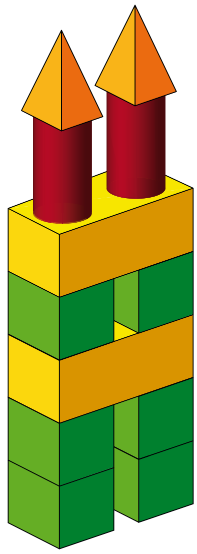


Zur Lösung der Aufgabe müssen Beziehungen zwischen den einzelnen Körpern gedeutet, Anzahlen bestimmt, Bauwerke gedanklich in eine andere Lage bewegt, Anordnungen festgestellt und Differenzen berechnet werden. Voraussetzung für die Bearbeitung dieser Aufgaben ist eine systematische Erkundung auf handelnder und mentaler Ebene.
In den ersten Schuljahren sollten daher Aufgaben, die ein **Verständnis für räumliche Vorstellungen und Beziehungen durch handelndes Lernen** ermöglichen, im Mittelpunkt des Unterrichts stehen.
Um diese Art von Aufgaben besser lösen zu können, werden nachfolgend Beispielaufgaben zur Kompetenzentwicklung und -überprüfung für den Anfangsunterricht Mathematik dargestellt und durch didaktische Anregungen zum Einsatz im Unterricht ergänzt.

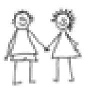
3.1.1 AUFGABEN ZUR KOMPETENZENTWICKLUNG

Aufgabe 1: Mit Körpern nach Vorgabe bauen — AFB I/II

a) Baue die Bauwerke nach.

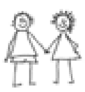
b) Baue ein eigenes Bauwerk aus Bausteinen.



c) Beschreibe einem Partner dein Bauwerk, ohne dass er es sehen kann.

Die Fragen und der Wortspeicher können dir helfen:

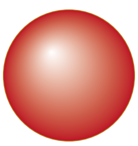
- Welche Körper hast du benutzt?
- Wie viele Würfel, Quader, (Zylinder, Pyramiden oder Kegel) hast du benutzt?
- Welche Farben haben deine Körper?
- In welcher Reihenfolge hast du deine Körper aufgebaut?
- Was unterscheidet dein Bauwerk von denen deiner Mitschüler?

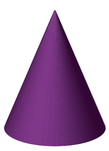


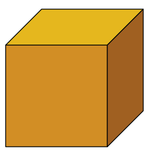
d) Baue ein Bauwerk nach der Beschreibung deines Partners.

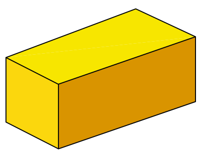
Wort-Schatz-Kästchen

Körper:

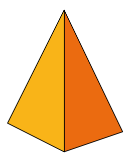

Kugel


Kegel


Würfel


Quader


Zylinder

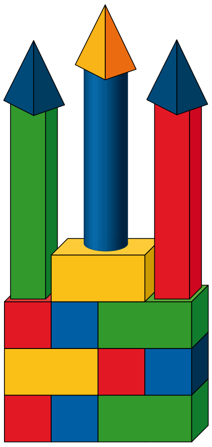

Pyramide

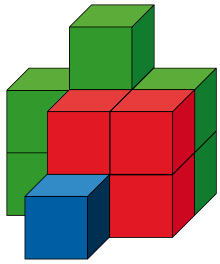
Lage: **oben, unten, rechts, links, davor, dahinter, neben, zwischen**

Aufgabe 2: Mit Körpern nach Vorgabe bauen AFB I/II

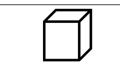
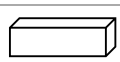
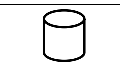
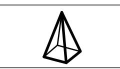
a) Baue diese Bauwerke nach.

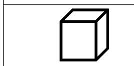
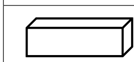
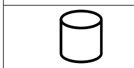
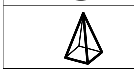
Hinweis:
Zu diesem Bauwerk gibt es verschiedene Lösungen.

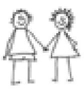




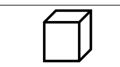
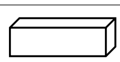
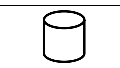
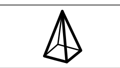
b) Ergänze nun die Tabellen.

<table>
<tr><td></td><td>||||</td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>||||</td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>



c) Baue ein Bauwerk zu dieser Tabelle. Vergleiche dein Bauwerk mit dem Bauwerk deines Partners. Was fällt euch auf?

<table>
<tr><td></td><td></td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>0</td></tr>
</table>

☆ d) Baue ein Bauwerk aus Körpern, die weniger als 6 Flächen haben.

DIDAKTISCHE ANREGUNGEN FÜR DIE AUFGABEN 1 UND 2

Das freie Bauen eignet sich für die erste Begegnung mit Körperformen, da es direkt an Vorerfahrungen aus dem Elementarbereich anknüpft. Ziel ist es, Einsichten in geometrische Zusammenhänge zu erlangen und das räumliche Vorstellungsvermögen durch praktisch-gegenständliche Handlungen zu entwickeln und die ausschließliche Arbeit auf Vorstellungsebene anzubahnen. Vor allem sollen das Bauen, Nachbauen und Beschreiben der Bauwerke die visuelle Wahrnehmung, die Raumorientierung und das Verständnis für räumliche Beziehungen fördern.

Die Bearbeitung der **Aufgaben 1 und 2** trägt zur intensiven Auseinandersetzung mit Bausteinen als mathematische Objekte und Repräsentanten geometrischer Körper bei und dient der

» Entwicklung individueller Baustrategien,
» Erkenntnis der Eigenschaften und Merkmale unterschiedlicher Körper,
» Nutzung mathematischer Begriffe zur Beschreibung,
» Entdeckung unterschiedlicher Kombinationsmöglichkeiten von Farben und Körpern,
» Förderung des aufmerksamen Beobachtens und genauen Beschreibens.

Die Entwicklung des Problemlöseverhaltens wird unterstützt, indem heuristische Strategien und Vorteile eines systematischen Vorgehens thematisiert werden, wobei die Arbeit mit dem konkreten Material im Vordergrund steht.
Gruppen- oder Partnerübungen eigenen sich zur Berücksichtigung sozialer Aspekte und zum Ausgleich unterschiedlicher Lernausgangslagen sowie Stärken und Schwächen in den sprachlichen Bereichen einzelner Schülerinnen und Schüler.

Ideen zur Weiterarbeit

» **Bauwerke fotografieren**

Eine durchaus auch im Unterricht nutzbare Möglichkeit ist das Fotografieren der im Unterricht entstandenen Gebäude, versehen mit Namenskarten der Erbauer, die als „Experten“ für dieses Bauwerk eingesetzt werden. Die so entstandenen Fotos können im weiteren Unterrichtsverlauf als Vorlage dienen und so die Zusammenarbeit mit weiteren Partnern ermöglichen.



» **Reale Gebäude nachbauen**

Die Schülerinnen und Schüler suchen sich Gebäude aus ihrer Lebensumwelt und bauen diese mit passenden Körpern nach. Möglich wäre auch das Aufbauen einer Fantasiestadt. Durch die Orientierung an realen Objekten wird die Abstraktionsfähigkeit geschult.

» **Bauwerke zeichnen**

Die Schülerinnen und Schüler müssen bewusst die Eigenschaften der Körper und deren Formen wahrnehmen und Fähigkeiten der räumlichen Orientierung und Raumwahrnehmung zum Freihandzeichen nutzen. Dabei steht die Arbeit bzw. der Austausch mit dem Partner oder in der Gruppe im Vordergrund der Aktivitäten.

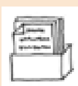
» **Zählen und Daten in Strichlisten darstellen**

Das Gewinnen und Darstellen relevanter Daten mithilfe von Strichlisten stellt eine weitere Möglichkeit zur Unterstützung der Wahrnehmung und Einordnung der unterschiedlichen geometrischen Körper eines Bauwerkes dar. Dazu müssen die Schülerinnen und Schüler die verschiedenen Körper erkennen und nach festgelegten Merkmalen (z. B. Form, Farbe, Anzahl, ...) sortieren und dokumentieren. Mit diesen Aufgabenstellungen gelingen innerfachliche Bezüge zwischen Kompetenzbereichen des Fachlehrplanes (vgl. Aufg. 2).

» **„Blindes“ bauen**

In Partnerarbeit werden Bauwerke nachgebaut, die nur für ein Kind sichtbar sind und dem anderen Kind beschrieben werden. Ein Wechsel zwischen den Partnern versetzt die Schülerinnen und Schüler in unterschiedliche Rollen (beschreibendes oder nachbauendes Kind).
Die Kommunikation über Bauwerke ermöglicht deren Nachbau und trägt gleichzeitig zur Entwicklung der sprachlichen Kompetenzen bei, indem die Schülerinnen und Schüler Fachbegriffe sicher anwenden und Beziehungen zwischen den einzelnen Körpern erkennen und beschreiben müssen.
Der kontrollierende Vergleich zwischen Bauwerk und Nachbau lässt Rückschlüsse auf Fehlerursachen zu und bietet Möglichkeiten zur Korrektur.

Anregungen unter: https://www.mathemonsterchen.de/Geometrie/Wuerfelbauten/



Körper: Würfel, Quader, Kugel, (Kegel, Pyramide, Zylinder)
Lagebeziehungen: oben, unten, rechts, links, davor, dahinter, neben, zwischen

Aufgabe 3: Mit Würfeln nach Vorgabe bauen AFB I/II

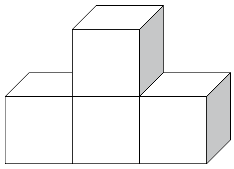
a) Baue ein Würfelbauwerk aus 10 (15, 20, 30) kleinen Würfeln.
b) Baue ein Würfelbauwerk aus 10 (15, 20, 30) kleinen Würfeln, bei dem alle Würfel von außen zu sehen sind.
c) Baue ein Würfelbauwerk aus 10 (15, 20, 30) kleinen Würfeln, bei dem nicht alle Würfel von außen zu sehen sind.

Hinweis: Die Schülerinnen und Schüler verwenden Steckwürfel.

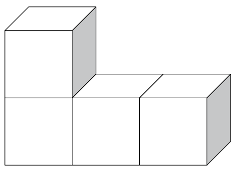
Aufgabe 4: Vierlinge mit Würfeln bauen AFB I/III

Die Kinder haben aus vier kleinen Würfeln verschiedene „Vierlinge“ gebaut.

Emils „Vierling“:



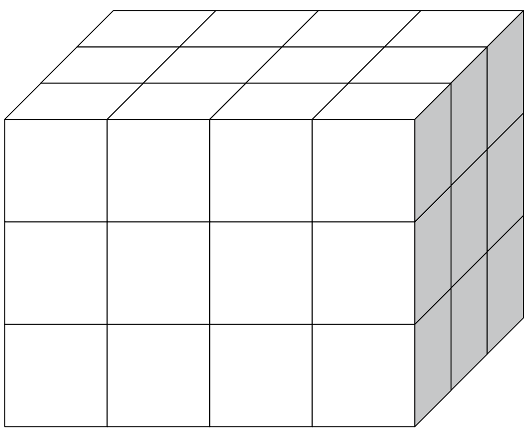
Ottos „Vierling“:



a) Baue weitere „Vierlinge“.

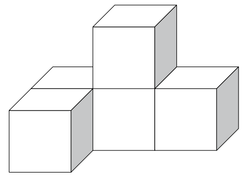
b) Baue alle „Vierlinge“ und zeichne sie auf.

c) Kann der Quader nachgebaut werden, wenn nur Ottos „Vierlinge“ dafür genutzt werden? Baut den Quader mit „Vierlingen“ nach. Verwendet Steckwürfel.

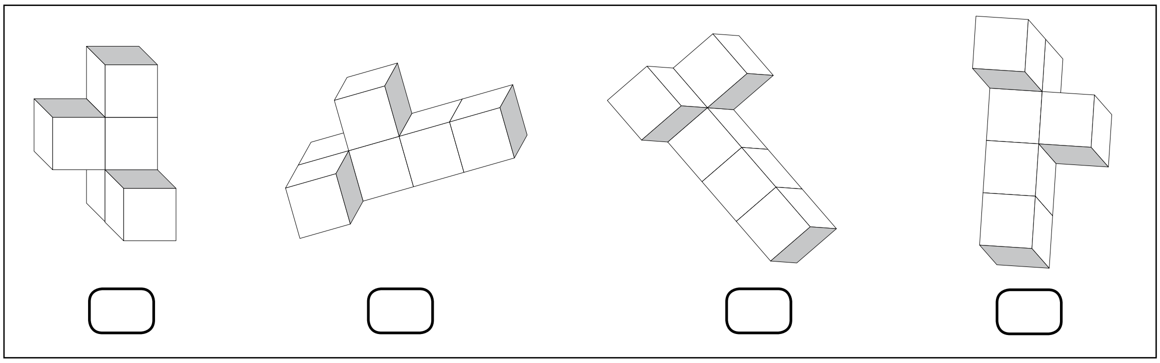


Aufgabe 5: Würfelbauwerke erkennen AFB I/II

Baue mit Steckwürfeln dieses Würfelbauwerk nach.



Welche Abbildung stellt dieses Würfelbauwerk dar?
Kreuze an.
Tipp: Du darfst dein Würfelbauwerk in die Hand nehmen und drehen, um zu vergleichen.

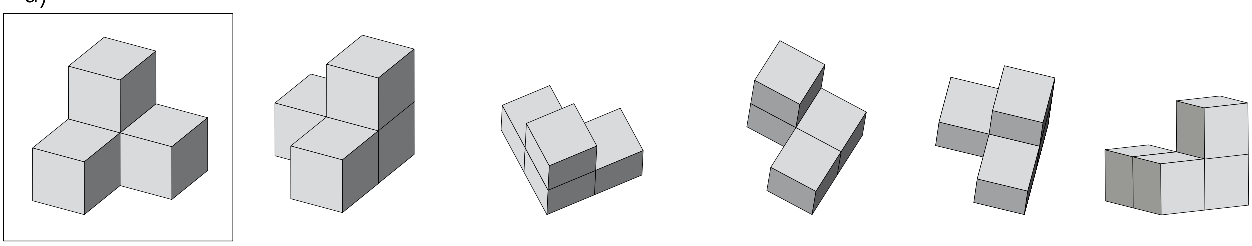


Aufgabe 6: Gleiche Würfelbauwerke erkennen AFB II

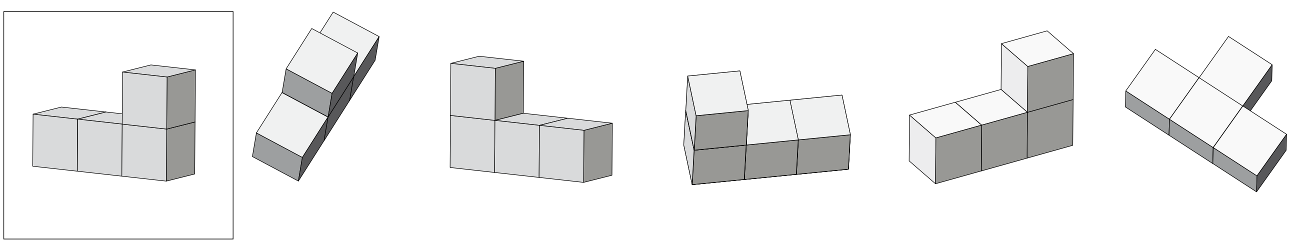
Welche der folgenden Würfelbauwerke sind gleich?
Streiche die durch, die <u>nicht</u> das erste Bauwerk darstellen.

Tipp: Du kannst das Würfelbauwerk nachbauen und anschließend drehen, um die falschen Würfelbauwerke zu finden.

a)

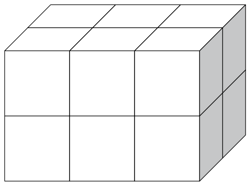


b)

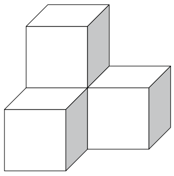


Aufgabe 7: Bauwerk zu einem Quader ergänzen — AFB III

a) Das ist Toms Bauwerk.



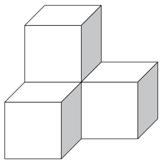
Max will das Bauwerk seines Freundes Tom nachbauen.
Er hat bereits angefangen zu bauen.



Wie viel kleine Würfel braucht Max noch? Du kannst das Bauwerk nachbauen und kontrollieren. Ergänze.

Max braucht noch ______ kleine Würfel.

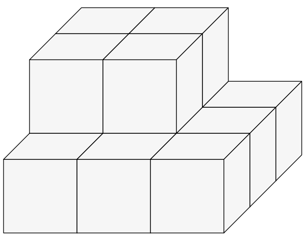
b) Tom behauptet: „Wenn ich aus deinem Bauwerk einen Würfel bauen will, brauche ich nur noch 4 kleine Würfel.“
Hat Tom Recht? Probiert es aus.



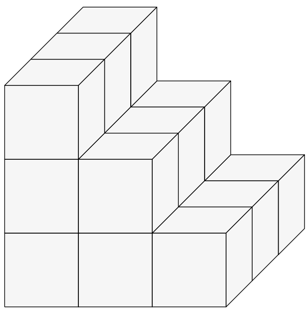
c) Präsentiert eure Lösungen in der Klasse und begründet diese.

Aufgabe 8: Bauwerke zu einem Würfel ergänzen — AFB II/III

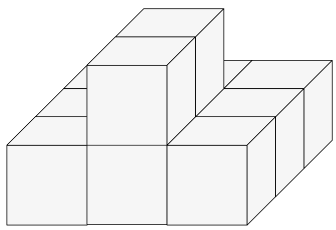
Verbinde jeweils ein Würfelbauwerk der oberen Reihe mit einem Würfelbauwerk der unteren Reihe zu einem Würfel.



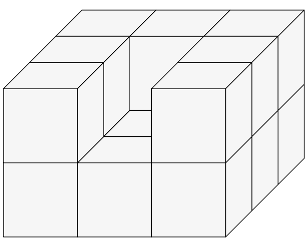
1



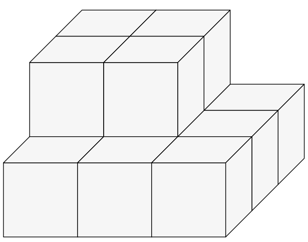
2



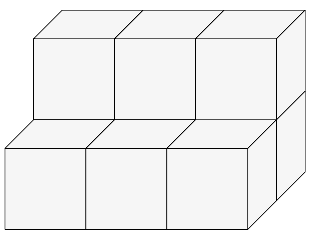
3



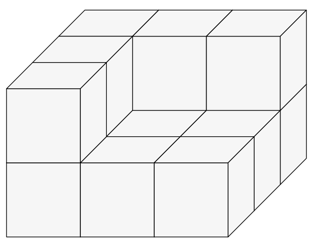
A



B



C



D

DIDAKTISCHE ANREGUNGEN FÜR DIE AUFGABEN 3 BIS 8

Durch den Aufbau der Würfelbauwerke soll ein Verständnis dafür entwickelt werden, dass verschiedene Aufbaumöglichkeiten bei gleicher Anzahl von Würfeln bestehen, ein Würfelbauwerk verschiedene Seitenansichten haben kann und dass nicht immer alle Würfel zu sehen sind.
Die praktischen Handlungen unterstützen die Vorbereitung auf das spätere Handeln auf der Vorstellungsebene (Raumvorstellungsvermögen).

Die **Aufgabe 3,** in der die Schülerinnen und Schüler Bauwerke aus einzelnen Würfeln unter Bauvorgaben errichten, schult das Raumvorstellungsvermögen und bereitet auf die erhöhten Anforderungen vor, die sich beim Bau aus Würfelmehrlingen in **Aufgabe 4** ergeben.
Bereits bei der Auswahl der geeigneten Bauteile zum Nachbau der vorgegebenen Würfelbauwerke müssen die Schülerinnen und Schüler die einzelnen Teile (real oder in der Vorstellung) drehen, um sich für oder gegen den Einsatz beim Bauen zu entscheiden. Sie stellen sich vor, in welcher Lage, weitere Bauteile verwendet werden können und sind somit nach und nach dazu in der Lage, reale Handlungen durch gedankliche zu ersetzen.
Die Auseinandersetzung mit diesen Aufgaben dient der
- Kenntnis über die Merkmale von Würfelbauwerken,
- Schulung und Nutzung von Raumvorstellungen,
- Erkenntnis, dass verschiedene Kombinationsmöglichkeiten zum angestrebten Ziel führen können,
- Förderung einer systematischen Vorgehensweise.

In den **Aufgaben 5 und 6** müssen aus zweidimensionalen Abbildungen dreidimensionale Bauwerke analysiert und nachgebaut werden. Anschließend muss zum Vergleich wiederum ein Transfer zwischen einem dreidimensionalen Objekt und einer zweidimensionalen Abbildung stattfinden. Zusätzlich muss das Würfelgebäude gedanklich (bzw. auch real) in eine andere Lage gedreht werden. Hier sollte das reale Handeln unbedingt gestattet sein, um – eventuell fehlende – Erfahrungen im räumlichen Vorstellungsvermögen anzuregen und für eine korrekte Lösung zu nutzen. Helfen kann, neben dem Drehen und Betrachten des eigenen Würfelbauwerks, das Zählen der „kleinen“ Würfel und das Beschreiben der Lage einzelner „kleiner“ Würfel („Hier liegt der kleine Würfel genau an der Ecke des Gebäudes. Hier befindet er sich nicht an der Ecke, sondern … .“).
Die Auseinandersetzung mit diesen Aufgaben dient der
- Kompetenzentwicklung, mit Würfeln nach Vorgabe zu bauen,
- Anregung des räumlichen Vorstellungsvermögens durch Nachbauen, Drehen und Betrachten dreidimensionaler Körper,
- Schulung der Fähigkeit, zweidimensionale Abbildungen gedanklich zu drehen und einer anderen Abbildung zuordnen zu können.

Die **Aufgaben 7 und 8** verlangen die Rekonstruktion eines (großen) Quaders bzw. Würfels aus vorgegebenen Teilen. Hierbei ist es erforderlich, zu ermitteln aus wie vielen kleinen Würfeln der komplette Körper besteht und dies mit den bereits vorhandenen kleinen Würfeln abzugleichen. Um die Entwicklung der Raumorientierung und -vorstellung zu fördern, muss handelndes Lernen, also das reale Vollziehen mentaler Handlungen bei Bedarf ermöglicht werden.

Die Auseinandersetzung mit diesen Aufgaben dient der
» Förderung der räumlichen Strukturierungsfähigkeit, die das flexible, mentale Zerlegen einer Anordnung in Teile, das Erkennen von deren Beziehungen sowie das mentale Zusammensetzen der Teile für eine Betrachtung des Ganzen beinhaltet,
» Möglichkeit, räumliche Problemstellungen an dreidimensionalen Modellen handelnd zu erfahren,
» Entwicklung räumlicher Orientierungsfähigkeiten durch entdeckendes Lösen.

Ideen zur Weiterarbeit

» **Steckwürfelmuster bauen**

Die Schülerinnen und Schüler bauen nach Ansage Musterreihen aus verschiedenfarbigen Steckwürfeln (... stecke zwei gelbe Würfel übereinander, dann einen roten, ...) oder Würfelgebäude (... hinter den gelben Würfel steckst du einen roten Würfel, rechts neben den roten Würfel einen grünen, ...). Die Übung kann variiert werden, indem die Schülerinnen und Schüler ihr Bauen beschreiben (... den blauen Würfel stecke ich rechts neben den grünen, ...) bzw. das Bauwerk nach Beschreibung nachbauen.

» **Bauen mit zweifarbigen Würfeln**

Das Bauen mit den zweifarbigen Würfeln ermöglicht eine Vielzahl interessanter Aufgaben.
Hinweis: Die Flächen des Würfels haben zwei unterschiedliche Farben. Jeweils drei Flächen einer Farbe haben einen gemeinsamen Eckpunkt.

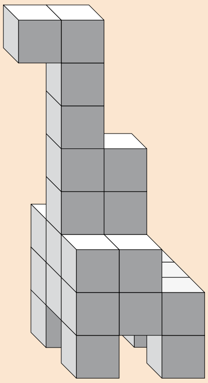
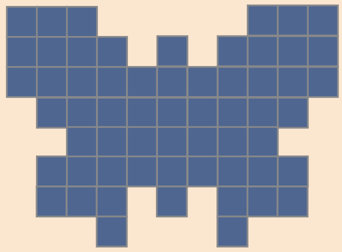
Mögliche Aufgabenstellungen mit 8 zweifarbigen Würfeln:
» Baue einen Würfel, dessen Flächen alle die gleiche Farbe haben.
» Baue einen Würfel, dessen Flächen ein Schachbrettmuster ergeben.
» ...

» **Würfelfünflinge („Pentominos“) bauen**

Die Aufgabe besteht darin, 5 (Steck-)Würfel zu möglichst unterschiedlichen Figuren zusammenzufügen (gedrehte oder gespiegelte Figuren zählen nicht). Der Anspruch für die Schülerinnen und Schüler kann erhöht werden, wenn die Anforderung damit verbunden wird, dass alle 12 Möglichkeiten zu bauen oder zu zeichnen sind. Die „Erfinder“ präsentieren im Anschluss ihre Ergebnisse. Dafür können den Figuren Namen zur Unterscheidung nach ihrer Form gegeben werden (I, L, T,...). Der kontrollierende Vergleich zwischen Bauwerk und Nachbau lässt Rückschlüsse auf Fehlerursachen zu und bietet Möglichkeiten zur Korrektur.

» **Bauen mit „Würfelmehrlingen“**

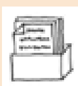
Die Schülerinnen und Schüler bauen mit verschiedenen Würfelmehrlingen Tiere. Der Partner findet heraus, welche Würfelmehrlinge verwendet wurden.

		
Die Figur wurde aus den Teilen des Soma-Würfels gebaut.	Diese Figuren wurden aus „Pentominos“ gebaut.	

» **Richtig oder falsch?**

Jedes Kind hält für seine Entscheidung einen roten und einen grünen Stift bereit. Die Lehrkraft zeigt jeweils 2 Würfelmehrlinge. Die Schülerinnen und Schüler müssen nun durch Kippen und Drehen im Kopf entscheiden, ob es zwei gleiche Körper sind. Sind sie der Meinung, die beiden Körper sind gleich, halten sie den grünen Stift nach oben, ansonsten den roten.

Weitere Anregungen unter: https://www.mathemonsterchen.de/Geometrie/Wuerfelbauten/

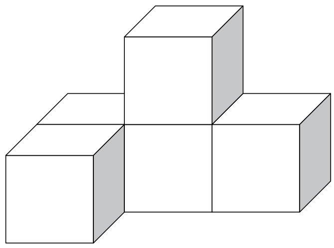


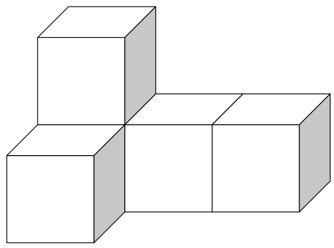
Körper:	Würfelzwilling, Würfeldrilling, Würfelvierling, Würfelfünfling (Pentomino)
Lagebeziehungen:	über, unter, vor, hinter, zwischen, neben
Bewegung:	drehen, kippen

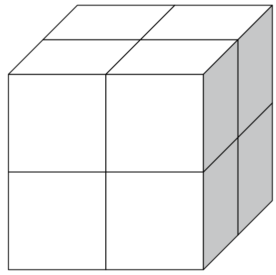
3.1.2 AUFGABEN ZUR KOMPETENZÜBERPRÜFUNG

1. Aufgabe — AFB I

Aus wie vielen kleinen Würfeln bestehen diese Bauwerke?

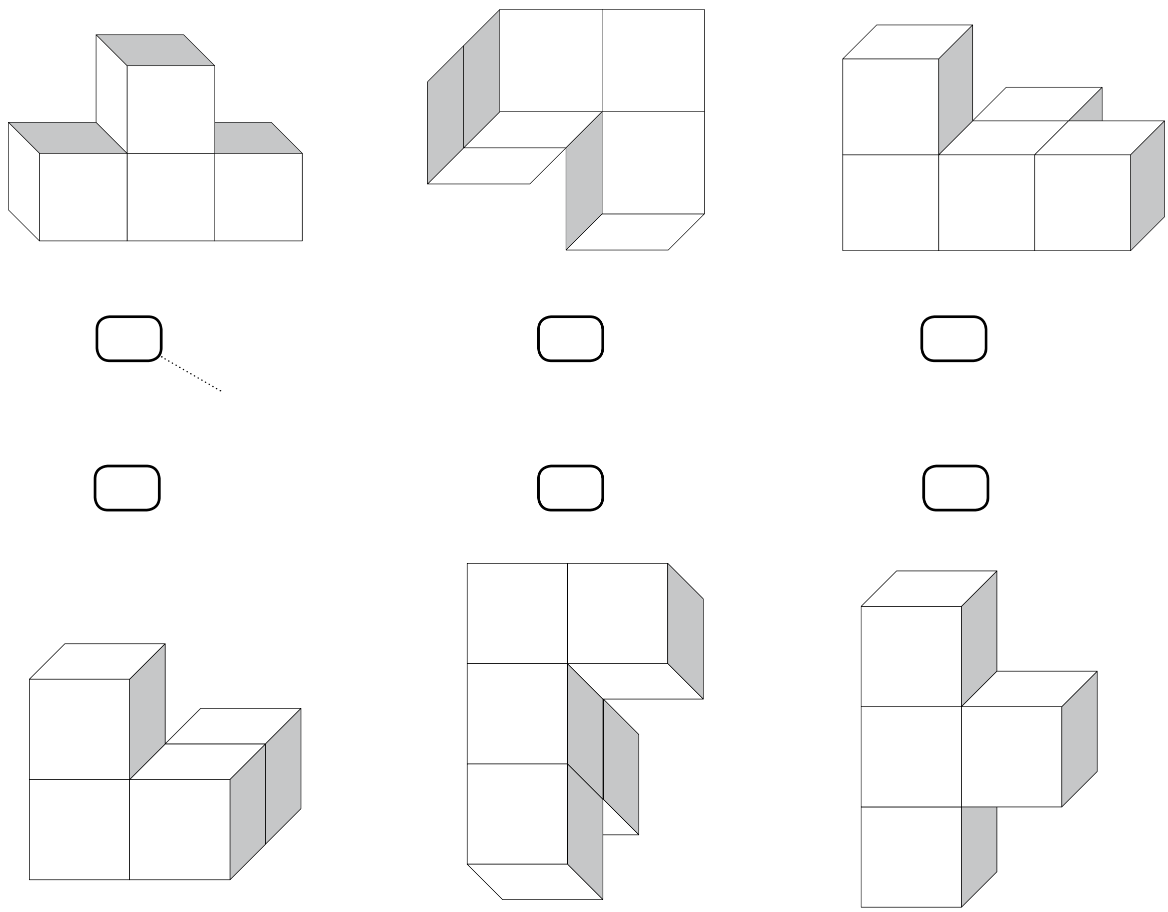






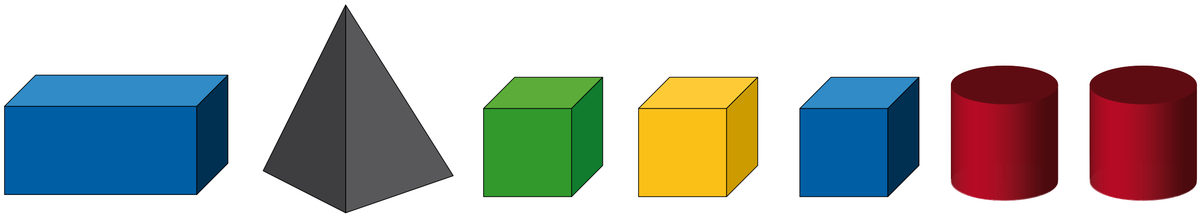
2. Aufgabe — AFB II

Verbinde die gleichen Würfelbauwerke.



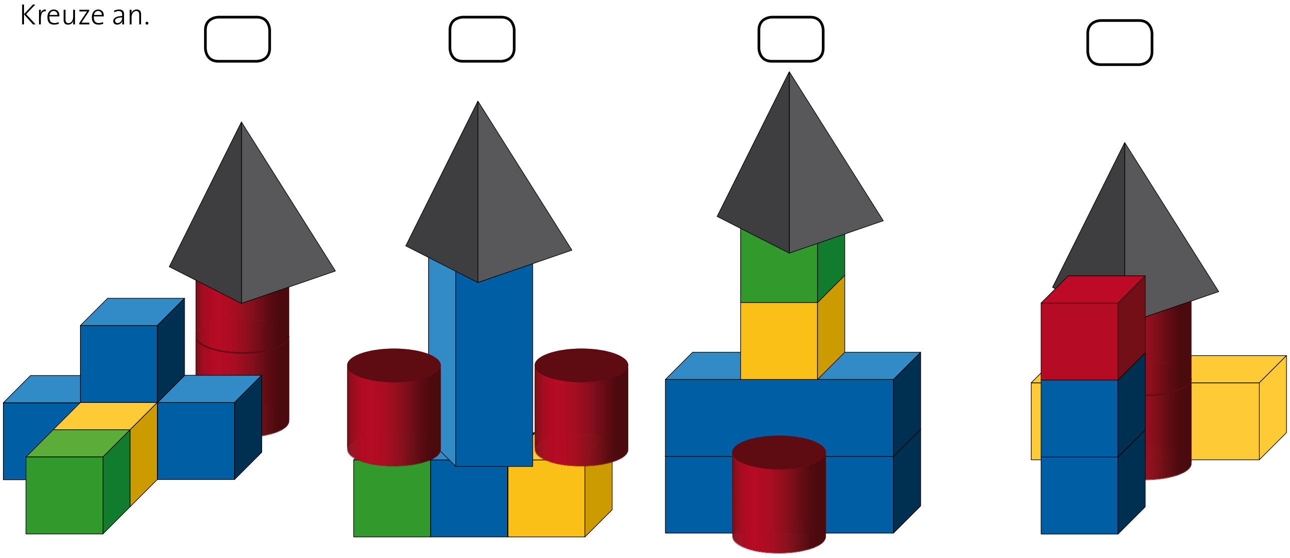
3. Aufgabe AFB II

Du hast nur diese Körper.



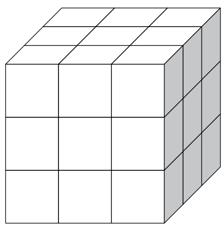
Welches Bauwerk kannst du damit bauen?

Kreuze an.

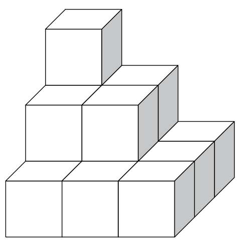


4. Aufgabe AFB III

Karl möchte diesen Würfel bauen.



So sieht sein angefangener Würfel aus.



Wie viele kleine Würfel fehlen Karl noch?

Antwort: Karl fehlen noch ________ kleine Würfel.

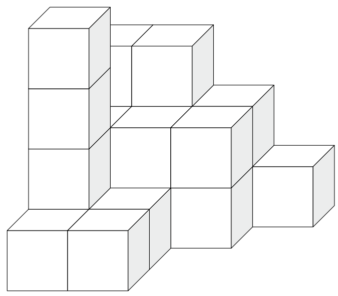
3.2 MIT WÜRFELN NACH VORGABEN BAUEN, BAUPLÄNE ZUORDNEN UND ERSTELLEN (SCHULJAHRGÄNGE 3/4)

Ein Bauplan stellt eine wesentliche Dokumentation des Bauens von Würfelbauwerken dar.
Innerhalb der zentralen Klassenarbeit Mathematik Schuljahrgang 4 (ZKA 4) wurde im Schuljahr 2012/2013 diese Kompetenz im Bereich *Raum und Form* mit nebenstehender Aufgabe getestet.

VERGLEICHSARBEIT MATHEMATIK SCHULJAHRGANG 3
SCHULJAHR 2012/2013

Aufgabe	AFB II	Lösungshäufigkeit landesweit 81 %

Vervollständige den Bauplan für das Würfelbauwerk aus 22 Würfeln.



Bauplan

	3		
2	2		
	1		

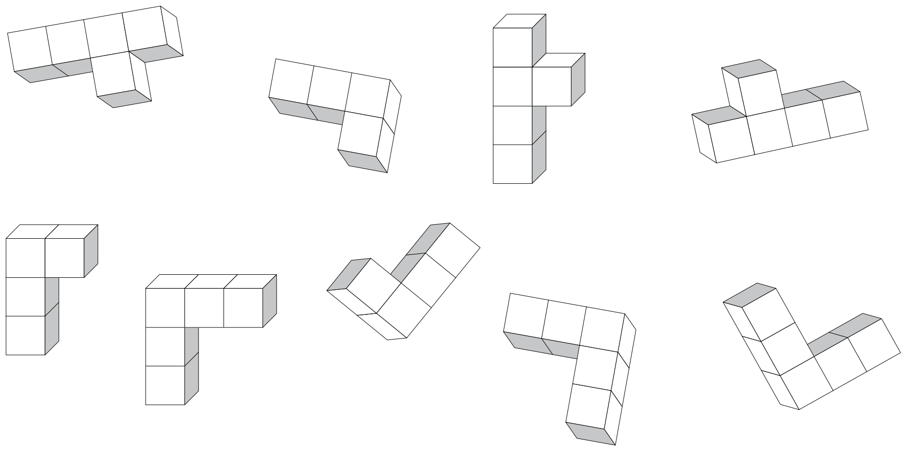
Die Entwicklung der entsprechenden Kompetenzen sollte, wie im Lehrplan gefordert, damit beginnen, dass **mit Würfeln nach Vorgaben gebaut** wird, damit die Schülerinnen und Schüler Problemstellungen an dreidimensionalen Modellen handelnd erfahren sowie entdeckend lösen können und so **mentale Vorstellungen** dazu **aufbauen**. Auch das **Zuordnen und Erstellen von Bauplänen** sollte aus diesem Grund immer wieder durch reale Handlungen bzw. Gebäude unterstützt werden. Schritt für Schritt kann dann der Übergang von der Handlungs- auf die Vorstellungsebene erfolgen.

Dafür müssen Lehrkräfte Lernsituationen mit Aufgabenstellungen schaffen, die ergiebig und leitend sind. Die nachfolgenden Aufgabenstellungen sollen solche Lernprozesse unterstützen und das **visuelle räumliche Denken** von Schülerinnen und Schülern anregen und Beispiele für eine Überprüfung entsprechender Kompetenzen verdeutlichen.

3.2.1 AUFGABEN ZUR KOMPETENZENTWICKLUNG

Aufgabe 9: Gleiche Bauwerke erkennen — AFB II

Färbe gleiche Bauwerke in der gleichen Farbe.



Aufgabe 10: Würfelbauwerke untersuchen — AFB II

Baue aus kleinen Würfeln einen Würfel mit 3 Ebenen.

a) Wie viele kleine Würfel benötigst du dazu?
Antwort: ____________________

b) Wie viele kleine Würfel benötigst du für eine Ebene?
Antwort: ____________________

c) Wie viele kleine Würfel sind unsichtbar, wenn das Würfelbauwerk fertig gebaut ist?
Antwort: ____________________

d) Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus 27 kleinen Würfeln einen Quader zu bauen, der kein Würfel ist?
Antwort: ____________________

DIDAKTISCHE ANREGUNGEN FÜR DIE AUFGABEN 9 UND 10

Die Bearbeitung der Aufgaben setzt räumliches Vorstellungsvermögen, vielfältige Raumerfahrungen und das sichere Beherrschen der verwendeten Fachbegriffe voraus. Ziel ist es, den Zusammenhang zwischen der Anzahl der verwendeten kleinen Würfel und verschiedenen Seitenansichten, die Besonderheiten der unterschiedlichen Ansichten sowie die Nicht-Sichtbarkeit von Bausteinen aus bestimmten Perspektiven deutlich zu machen. Die aktive Auseinandersetzung mit problemorientierten Aufgaben und das bewusste Nutzen erworbener mathematischer Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten können zur Förderung heuristischer Kompetenzen beitragen. Zur Problemlösung sollten die Schülerinnen und Schüler auch die Möglichkeit haben, auf die handelnde Ebene zurückzukehren und in den Austausch mit einem Partner treten zu können.
Die Bearbeitung der Aufgaben 9 und 10 fördert die Auseinandersetzung mit verschiedenen Ansichten zu einem Gebäude und verdeutlicht den Zusammenhang zur Anzahl der verwendeten Bausteine. Sie unterstützen

- das Erkennen zweidimensionaler Abbildungen von dreidimensionalen Gebäuden,
- das mentale Bewegen, Auf- und Abbauen von Würfelbauwerken,
- die zielgerichtete Anwendung mathematischer Begriffe und Grundfertigkeiten,
- die individuellen Problemlösefertigkeiten,
- die Kommunikationskompetenz durch aufmerksames Beobachten, genaues Beschreiben und Begründen.

Ideen zur Weiterarbeit und Differenzierung

- **Würfelbauwerke untersuchen**

Um leistungsstarke Schülerinnen und Schüler zu fördern, kann die Aufgabenstellung aus Aufgabe 10 erweitert und in einen Zusammenhang mit arithmetischen Mustern gebracht werden. *Baue einen Würfel mit vier Ebenen. Löse die Teilaufgaben a – c dazu. Wie viele kleine Würfel benötigst du für einen Würfel aus 5, 6, … Ebenen? Erkläre, wie du die Anzahl der benötigten Würfel berechnen kannst?*

- **Kleine Würfel zählen**

Die Schülerinnen und Schüler sollen zu einem vorgegebenen Würfelbauwerk (reales Gebäude, Abbildung, Bauplan, …) und einer Anzahl bereits verwendeter Würfel die Anzahl der noch fehlenden Würfel ermitteln oder die Anzahl der kleinen Würfel angeben, um das vorgegebene Bauwerk zu einem Würfel, Quader, … zu ergänzen.

- **Würfelgebäude mit Multiplikationsaufgaben verknüpfen**

Die Schülerinnen und Schüler wenden ihr Wissen an, indem sie zu Würfelgebäuden und bildlichen Darstellungen Multiplikationsaufgaben finden und darstellen.

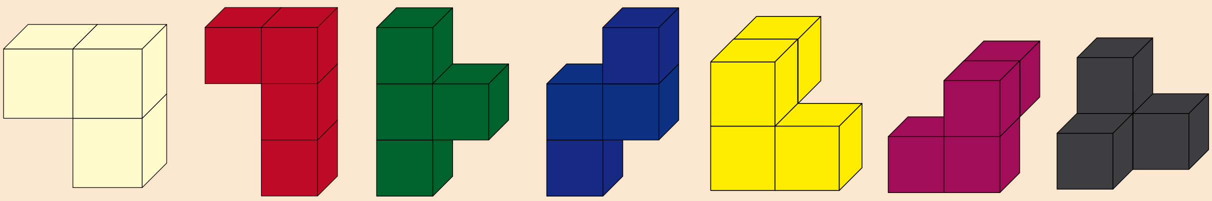
- **Forscher-Aufgaben**

Die Schülerinnen und Schüler erhalten Forscher-Aufgaben, bei denen es keine eindeutige Lösung geben muss. Vielmehr zielen diese Aufgaben darauf ab, dass die Schülerinnen und Schüler Strategien zum Schätzen entwickeln, über mathematische Inhalte mit anderen ins Gespräch kommen und Freude am Knobeln haben. Diese Aufgaben können sehr gut differenziert werden.

Beispiele:
» Wie viele Kugeln könnten sich in einem Glas/ in einem Kaugummiautomaten/ … befinden?
» Wie viele Würfel könnten sich in einem Schuhkarton/ … befinden?

» **Soma-Würfel bauen**

Der Soma-Würfel bietet nicht nur vielfältige Möglichkeiten des Vergleichens, des Bauens und der Entwicklung der Raumvorstellungen, sondern er bietet auch eine Möglichkeit der fächerübergreifenden Vertiefung von Teilkompetenzen im Fach Gestalten.



Das Grundproblem des Soma-Würfels ist es, aus den 7 Einzelteilen einen Würfel zusammenzusetzen.

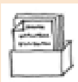
Die Herstellung dieser Grundbausteine aus dem Werkstoff Holz im Fach Gestalten im Schuljahrgang 4 erfordert bei geringem Materialaufwand eine Vielzahl von manuellen Tätigkeiten, wie das Anreißen, Trennen, Feilen, Schleifen, Prüfen und Leimen.
Zusätzlich besteht die Möglichkeit der differenzierten Farbgestaltung zum Ende des Herstellungsprozesses.

Materialaufwand je Schüler:

1 x Holzleiste 20x20x500
5 x Holzwürfel 20x20x20

Weitere Anregungen unter:

- https://pikas.dzlm.de/material-pik/herausfordernde-lernangebote/haus-7-unterrichts-material/soma-w%C3%BCrfel (zuletzt abgerufen am 30.03.2020)
- http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/mathe2000/pdf/Symp22/materialien/Reinhold.pdf (zuletzt abgerufen am 30.03.2020)
- https://primakom.dzlm.de/inhalte/raum-und-form/körper/material (zuletzt abgerufen am 30.03.2020)



Körper:	Würfel, Quader, Ecke, Kante, Fläche
Würfelbauwerke:	Würfelzwilling, Würfeldrilling, Würfelvierling, Würfelfünfling „Pentomino“
Bewegungen der Würfelbauwerke:	drehen, kippen, spiegeln
Bauregeln:	Fläche an Fläche bauen, Kante an Kante bauen

Aufgabe 11: Würfelbauwerke nach Bauplan bauen — AFB II

Baue passende Würfelbauwerke.

0	3	0
0	2	1
2	1	1

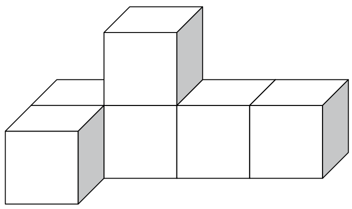
1	2	3
2	3	1
3	1	2

0	3	4
2	2	3
0	1	2

3	3	1
0	4	1
0	2	3

Aufgabe 12: Bauplan zuordnen — AFB I

Tim hat ein Würfelgebäude gebaut.



Welcher Bauplan passt zu seinem Gebäude? Kreuze an.

☐

2	1	1	1
1			

☐

2	2	1	1
2			

☐

1	2	2	1
2			

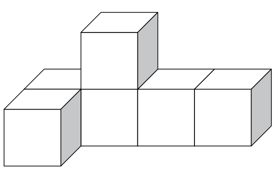
☐

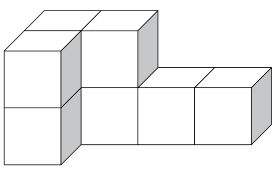
1	2	1	1
1			

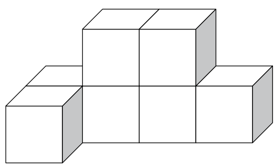
Quelle: VERA 3 Mathematik 2013, landesweite Lösungshäufigkeit 89 %

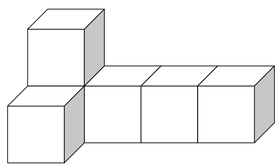
Aufgabe 13: Bauplan zuordnen — AFB II

Welcher Bauplan passt zu welchem Würfelbauwerk?
Ordne zu und verbinde.









○ ○ ○ ○

2	2	1	1
2			

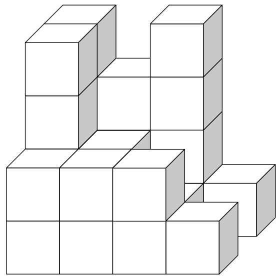
2	1	1	1
1			

1	2	1	1
1			

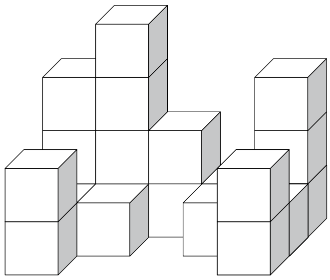
1	2	2	1
1			

Aufgabe 14: Bauplan erstellen AFB II

Erstelle den Bauplan für dieses Würfelgebäude.



Finde die Fehler im Bauplan. Kreise ein.

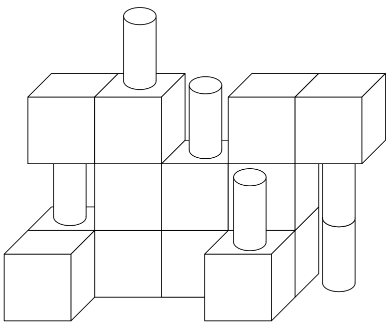


3	4	2	1	3
1	2	1	1	1
2	0	0	0	2

Aufgabe 15: Bauplan ergänzen AFB II

Franzi hat zu ihrem Bauwerk einen Bauplan erstellt.

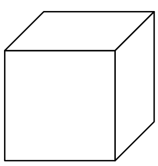
Ergänze im dick umrandeten Feld.



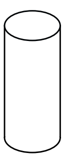
1 1 1	1 3		3	1 2
1			1 1	

Quelle: VERA 3 Mathematik 2018

Wort-Schatz-Kästchen



Würfel



Zylinder

Grundriss

Anzahl der Würfel aufeinander

3	4	2	0	3
1	1	1	1	1
2	0	0	0	2

Bauplan

DIDAKTISCHE ANREGUNGEN FÜR DIE AUFGABEN 11, 12 UND 13

Beim Arbeiten mit Bauplänen muss eine ebene Darstellung (Bauplan) in eine räumliche (Würfelgebäude) übertragen werden. Die Schwierigkeit liegt darin, sich das Gebäude aus der Anzahl hintereinanderliegender Schichten vorzustellen. Jede eingetragene Zahl entspricht der Anzahl der Ebenen, die das Kind nach oben bauen muss, wobei auch die Lage innerhalb des Gebäudes zu beachten ist. Um die dreidimensionale Darstellung eines Würfelbauwerks in einen zweidimensionalen Bauplan zu übertragen, muss eine gedankliche Transferleistung erbracht werden. Dazu muss das Kind beispielsweise erkennen, dass das Bauwerk von unten nach oben aufgestapelt wurde und sich im nicht sichtbaren Bereich ebenfalls Würfel befinden, die das Herunterfallen der obenliegenden Würfel verhindern. Daher ist ein häufiger Fehler das Nichterkennen verborgener Würfel. Die kontinuierliche Entwicklung eines altersgemäßen Raumvorstellungsvermögens hilft, solche Fehler zu vermeiden.

Es empfiehlt sich, an die freien Bauphasen anzuknüpfen und im Anschluss daran unterschiedliche Aktivitäten zum Bauen von Würfelgebäuden nach Plan und dem Lesen bzw. Erstellen von Bauplänen durchzuführen. Dies fördert

» das Verständnis des klassischen Bauplanes als Möglichkeit der zweidimensionalen Darstellung von dreidimensionalen Bauwerken,
» den Transfer zwischen den verschiedenen Darstellungsebenen und somit
» die Abstraktionsfähigkeit, die erforderlich ist, um aus Bauplänen die entsprechenden Gebäude zu bauen und fertigen Gebäuden den passenden Bauplan zuzuordnen,
» die Darstellungs- und Kommunikationskompetenz.

Ideen zur Weiterarbeit

» **Bauen nach Vorgaben**

Die Schülerinnen und Schüler nehmen sich eine bestimmte Anzahl kleiner Würfel (10, 12, 15, ...) und bauen auf einer vorgegebenen Grundfläche (leerer Bauplan; Quadratraster) verschiedene Würfelgebäude.

Mögliche Aufgabenvarianten:

» Baue ein besonders hohes (flaches) Bauwerk.
» Baue ein symmetrisches Bauwerk.
» Präsentiere dein Bauwerk.
» ...

» **Partnerbauen**

Kind A baut nicht sichtbar für Kind B ein Würfelgebäude und erstellt dazu einen Bauplan. Kind B muss dieses Gebäude mithilfe des Bauplanes nachbauen. Danach werden beide Gebäude miteinander verglichen.

Varianten:

» Ein Kind beschreibt unter Benutzung geeigneter Begriffe/Formulierungen („In der ersten Reihe liegen links drei Würfel übereinander. Rechts daneben ...“) anderen Schülerinnen und Schülern einen Bauplan. Diese bauen das Würfelgebäude nach der Beschreibung und vergleichen im Anschluss ihre Ergebnisse (Wer hat korrekt gebaut? Wo gibt es Unterschiede? Warum?).

» **Würfelgebäude in Spiegelansicht bauen**

Kind A baut ein Würfelgebäude. Kind B baut dieses Würfelgebäude in Spiegelansicht nach. Zu beiden Würfelgebäuden können auch noch die jeweiligen Baupläne erstellt und verglichen werden.

» **Memory herstellen**

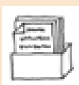
Ein Foto eines Würfelgebäudes und ein Bauplan ergeben je ein Paar. Gespielt wird nach den Regeln von Memory. Besonders motivierend ist es, wenn die Schülerinnen und Schüler eigene Würfelgebäude und Baupläne nutzen (z. B. mithilfe digitaler Fotografie) und so ihr persönliches Exemplar herstellen und damit spielen.

Weitere Anregungen unter:

» https://pikas.dzlm.de/material-pik/haus-78-herausfordernde-lernangebote/haus-7-unterrichtsmaterial/bauen-mit-würfeln (zuletzt abgerufen am 08.06.2020)

» http://dlgs.uni-potsdam.de/konzepte/lagebeziehungen/wuerfelwelten (zuletzt abgerufen am 08.06.2020)

» https://mauswiesel.bildung.hessen.de/mathematik/geometrie/koerper/wuerfel/wuerfelgebaeude/index.html (zuletzt abgerufen am 01.10.2018)

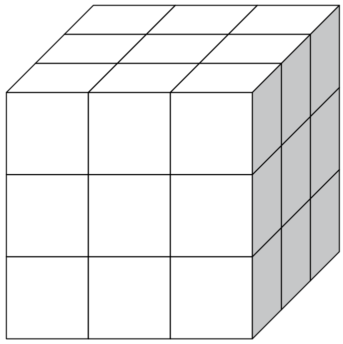


Begriffe:	Bauplan (auch leer), Fläche, Kante, Reihe, Spalte, Ebene,
Lagebeziehungen:	vorn, davor, hinten, dahinter, zwischen, dazwischen, übereinander

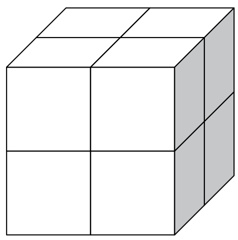
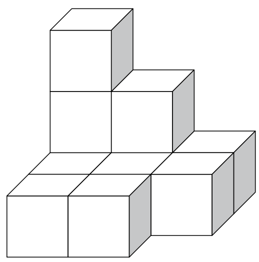
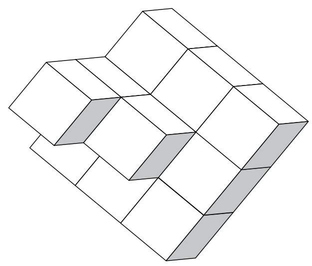
3.2.2 AUFGABEN ZUR KOMPETENZÜBERPRÜFUNG

1. Aufgabe — AFB I

Hier siehst du einen Würfel,
der aus kleinen Würfeln zusammengebaut ist.

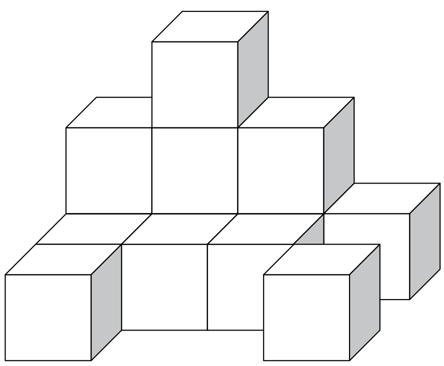


Wie viele kleine Würfel fehlen jeweils, wenn das begonnene Bauwerk zu diesem großen Würfel ergänzt werden soll?

		
Es fehlen ________ kleine Würfel.	Es fehlen ________ kleine Würfel.	Es fehlen ________ kleine Würfel.

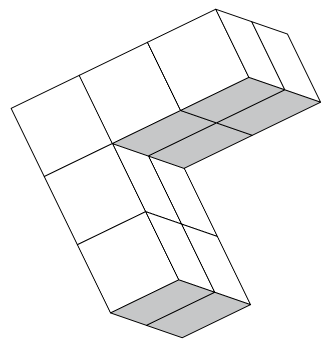
2. Aufgabe — AFB II

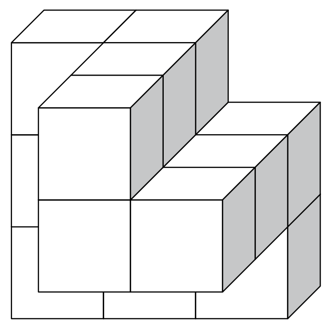
Erstelle für das Würfelbauwerk einen Bauplan.



3. Aufgabe AFB II

Kann man die beiden Teile so zusammensetzen, dass ein vollständiger Würfel entsteht?
Begründe deine Entscheidung.



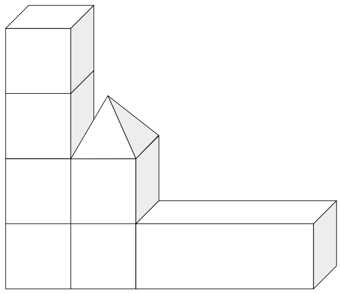


3.3. GRUNDRISSE UND ANSICHTEN VON BAUWERKEN UND WÜRFELGEBÄUDEN UNTERSCHEIDEN UND SKIZZIEREN (SCHULJAHRGÄNGE 3/4)

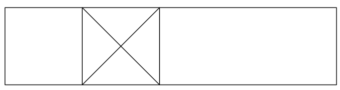
Das Unterscheiden der Ansichten von Bauwerken verlangt von den Schülerinnen und Schülern **räumliche Orientierung in zweifacher Hinsicht.** Zum einen müssen sie die **Konstruktion des Bauwerks analysieren** und zum anderen verlangt es den **Perspektivwechsel** bei der Sicht auf das Bauwerk.
Im Schuljahr 2013/2014 wurde in der zentralen Klassenarbeit Mathematik im Schuljahrgang 4 die Teilkompetenz **Ansichten einer Gebäudeabbildung unterscheiden** mit folgender Aufgabe überprüft.

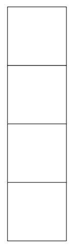
ZENTRALE KLASSENARBEIT MATHEMATIK SCHULJAHRGANG 4
SCHULJAHR 2013/2014

Aufgabe	AFB II	Lösungshäufigkeit Pilotierung a) 87 %, b) 42 %



Von diesem Gebäude wurden zwei Ansichten gezeichnet.
Ergänze: oben, unten, vorn, hinten, rechts ***oder*** links.





a) Ansicht von: ____________________

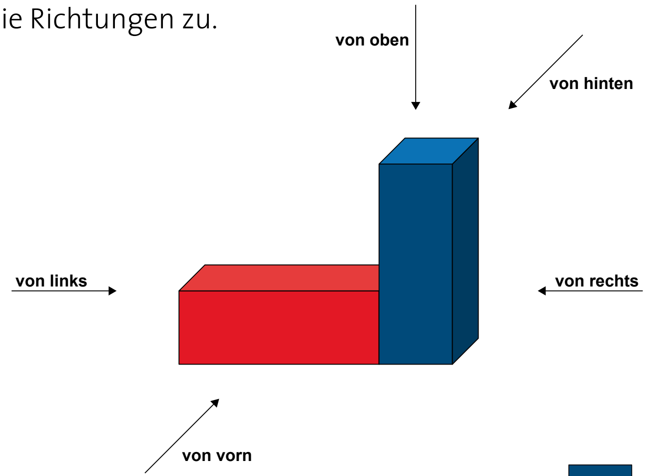
b) Ansicht von: ____________________

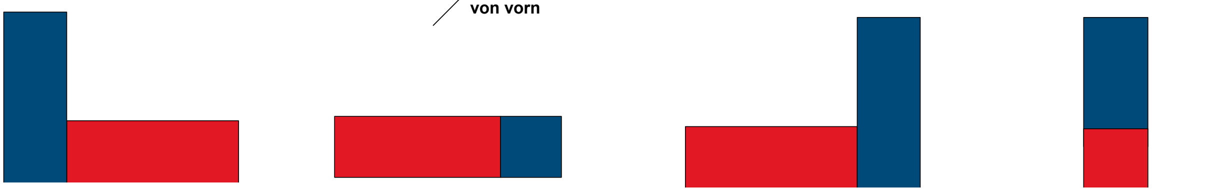
Indem im Unterricht Anordnungen von Körpern erstellt werden, diese aus verschiedenen Perspektiven betrachtet (fotografiert) und die Standpunkte des Betrachters (Fotografen) ermittelt werden, können **räumliche Orientierungsprozesse** gefördert werden.
Die Entwicklung räumlichen Vorstellungsvermögens ist im Anfangsunterricht besonders eng an Gegenstände gebunden. Durch Handlungen, eigene Bewegungen im Raum und das Gespräch über Lagebeziehungen sollen zunehmend **innere Bilder zur Lage von Objekten** bei den Schülerinnen und Schülern entwickelt werden.
Die nachfolgenden Aufgabenstellungen und bildlichen Darstellungen sollen diese Lernprozesse unterstützen und dienen der Überprüfung entsprechender Kompetenzen.

3.3.1 AUFGABEN ZUR KOMPETENZENTWICKLUNG

Aufgabe 14: Bauwerke nachbauen und Ansichten zuordnen — AFB I/II

Baue nach.
Schaue aus verschiedenen Richtungen auf das Bauwerk.
Ordne den Ansichten die Richtungen zu.



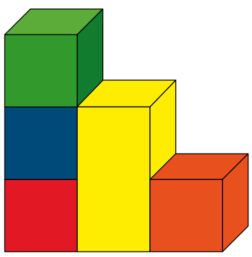


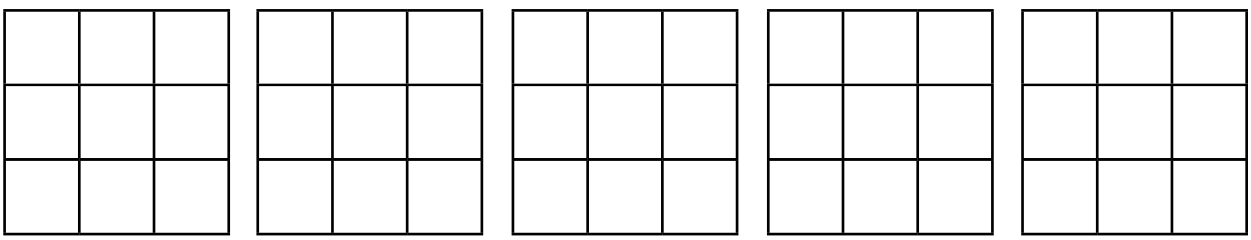
von	von	von	von

Aufgabe 15: Ansichten von Bauwerken skizzieren — AFB I/II

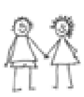
Wie sieht das Bauwerk aus unterschiedlichen Richtungen aus?

a) Zeichne die Ansichten, achte dabei auf die Farben.



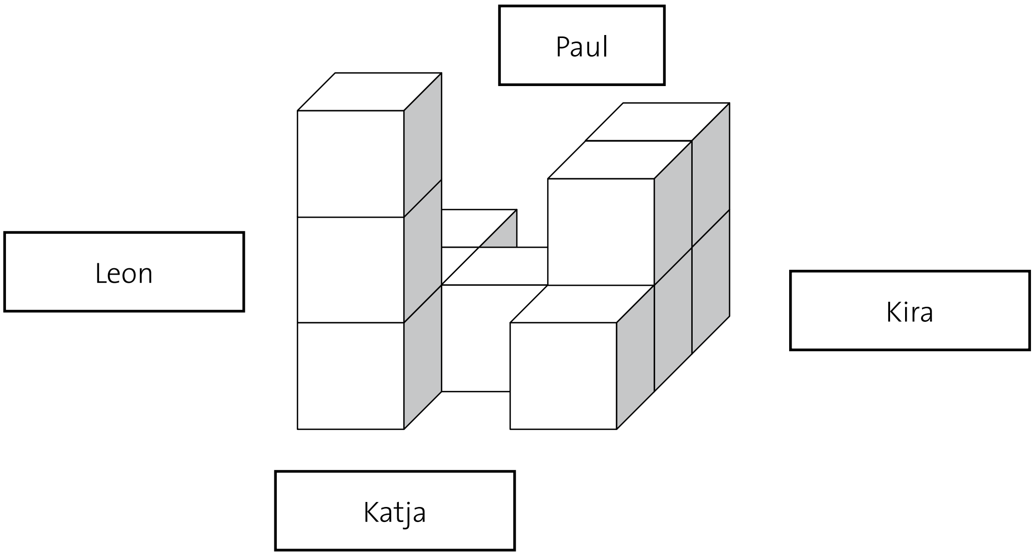


von vorn — von hinten — von links — von rechts — von oben



b) Vergleiche deine gezeichneten Ansichten mit einem Partner.
Was stellt ihr fest?

Aufgabe 16: Ansichten von Würfelbauwerken vergleichen AFB I/II



Jedes Kind zeichnete einen Bauplan dieses Würfelgebäudes aus seiner Sicht.

a) Wer hat diesen Bauplan gezeichnet?

3	1	1
0	1	0
1	2	2

Antwort: ____________________

☆ b) Zeichne die Baupläne der anderen Kinder.

Name des Kindes: ________________ ________________ ________________

DIDAKTISCHE ANREGUNGEN FÜR DIE AUFGABEN 14, 15 UND 16

Diese Aufgaben erfordern das **mentale Operieren,** denn aus den dreidimensionalen Bauwerken muss die zweidimensionale Abbildung einer Ansicht erkannt, gezeichnet, gedreht und verglichen werden. Diesen kopfgeometrischen Aufgaben sollte stets ein materialgestützter Unterricht mit vielen handelnden und spielerischen Aktivitäten vorausgegangen sein. Zur **Anbahnung des mentalen Operierens** müssen die Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit erhalten, diese **Bauwerke nachzubauen.** Dadurch können sie diese von allen Seiten betrachten und die unterschiedlichen Ansichten erfassen, zuordnen und zeichnen.

Die Bearbeitung der Aufgaben fördert
» die Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens,
» das mentale Operieren mit Körpern im Raum,
» die Vorstellung von Rotationen,
» die Kenntnis der Begriffe zur Beschreibung der Lage im Raum und der sichtbaren Flächen,
» das aufmerksame Beobachten und genaue Beschreiben.

Aufgabenvarianten

» Gegenstände aus verschiedenen Richtungen betrachten

Die 4 Kinder sitzen um den Traktor herum.
a) Welche Ansicht des Traktors sieht Paul (Anna, ...)? Kreuze an.

Paul

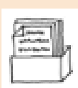
Anna  Lara

Max

 ☐  ☐  ☐

» Ansichten zu einfachen Bauwerken zeichnen
» Gebäude nach vorgegebenen Ansichten bauen
» Gebäude mit Steckwürfeln nachbauen und drehen
» sich gedanklich in die Lage eines Anderen versetzen und seine Ansicht beschreiben

Weitere Anregungen unter:
» https://pikas.dzlm.de/node/1191 (zuletzt abgerufen am 31.03.2020)
» https://mauswiesel.bildung.hessen.de/mathematik/geometrie/koerper/wuerfel/wuerfelgebaeude/index.html (zuletzt abgerufen am 31.03.2020)

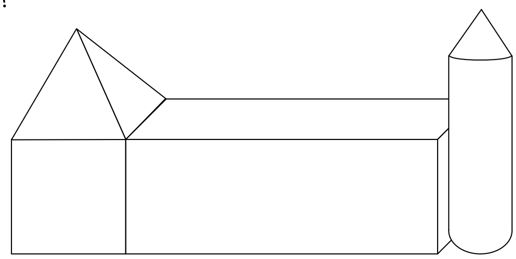


Lagebeziehungen:	oben, unten, rechts, links, davor, dahinter, dazwischen, zwischen, neben
Flächen:	Viereck, Rechteck, Quadrat, Kreis, Dreieck

3.3.2 AUFGABEN ZUR KOMPETENZÜBERPRÜFUNG

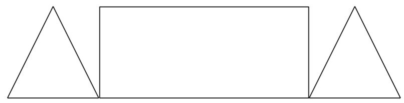
1. Aufgabe — AFB I

Welche Zeichnung zeigt das Bauwerk von oben?
Kreuze an.

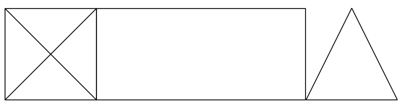


A ☐

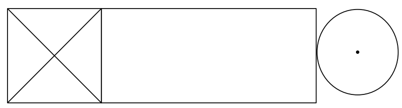
B ☐



C ☐



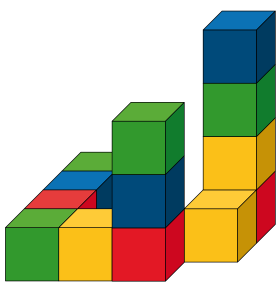
D ☐

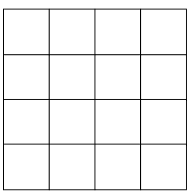


Quelle: VERA 3 Mathematik 2013, landesweite Lösungshäufigkeit 71 %

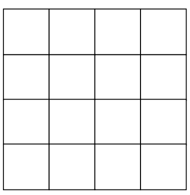
2. Aufgabe — AFB III

Wie sieht das Bauwerk aus unterschiedlichen Richtungen aus?
Zeichne die Ansichten, achte dabei auf die Farben.

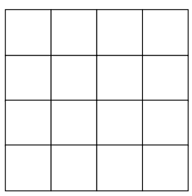




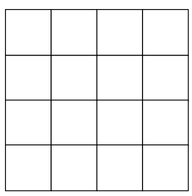
von vorn



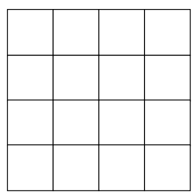
von hinten



von rechts



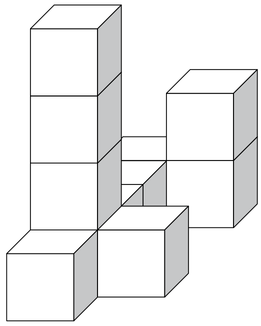
von links



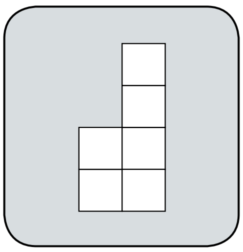
von oben

3. Aufgabe **AFB III**

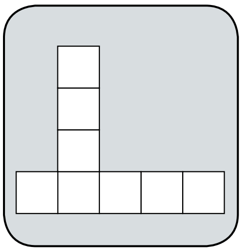
Tom hat dieses Würfelgebäude gebaut.



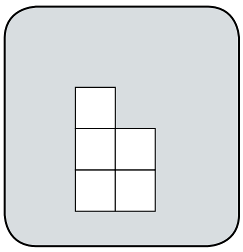
a) Welche Abbildung zeigt eine Ansicht des Würfelgebäudes?
Kreuze an.



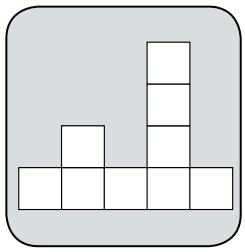
☐



☐



☐

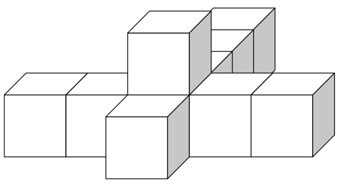


☐

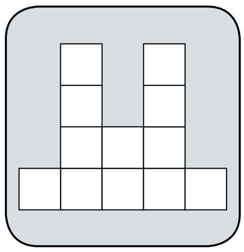
b) Tom baut ein neues Würfelgebäude mit der gleichen Anzahl der Würfel.
Welche Abbildung gehört zu dem neuen Würfelgebäude?
Kreuze an.

2	2	1	2	2
1	0	0	0	1

☐



☐



☐

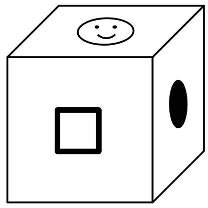
3.4. KÖRPERNETZE ERKENNEN, AUCH MITHILFE DIGITALER WERKZEUGE ERSTELLEN UND UNTERSUCHEN, KÖRPERNETZE VOM QUADER UND SPEZIALFALL WÜRFEL ABWICKELN UND ZEICHNEN (SCHULJAHRGÄNGE 3/4)

Aufgaben zu Körpernetzen oder Abwicklungen von Quadern und dem Spezialfall Würfel tragen zur Entwicklung der Prozesse des **gedanklichen Bewegens von Körpern** bei und fördern **räumliche Visualisierungs- und Denkprozesse.**
Eine besondere Herausforderung für die Schülerinnen und Schüler stellte die nebenstehende Aufgabe aus der zentralen Klassenarbeit Mathematik Schuljahrgang 4 aus dem Schuljahr 2014/2015 dar.

ZENTRALE KLASSENARBEIT MATHEMATIK SCHULJAHRGANG 4
SCHULJAHR 2014/2015

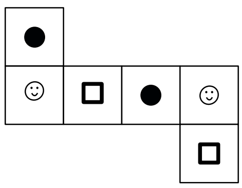
Aufgabe	AFB III	Lösungshäufigkeit landesweit 44 %

Hier siehst du einen Würfel.

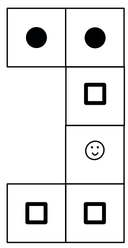


Welches Würfelnetz gehört zu diesem Würfel?
Kreuze an.

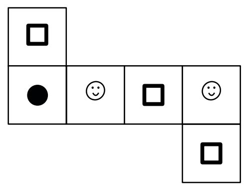
a)



b)



c)



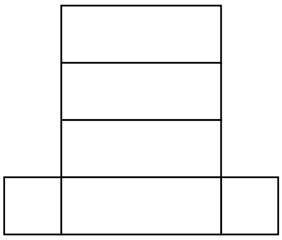
Räumliche Visualisierungsprozesse unterscheiden sich von Prozessen der Erkennung räumlicher Beziehungen. Sie sind durch **dynamisches Bewegen der Körper und gedankliches zueinander in Beziehung setzen** gekennzeichnet. Dadurch sind sie sehr anspruchsvoll für Schülerinnen und Schüler. Der Einsatz digitaler Medien hat durch die Entwicklung der Touch- und Multitouchtechnologie sowie die Möglichkeit der Darstellung dynamischer Prozesse besonders auf diesem Gebiet ein hohes Potenzial für die individuelle Förderung. Dabei kommt es natürlich auf die geeignete Auswahl der Programme sowie die fachdidaktische Integration in den Unterricht an, um dieses Potenzial auch auszuschöpfen.
Nachfolgende Beispielaufgaben dienen der Kompetenzentwicklung und -überprüfung für den Mathematikunterricht ab Schuljahrgang 3 und sind durch didaktische Anregungen zum Einsatz im Unterricht ergänzt.

3.4.1 AUFGABEN ZUR KOMPETENZENTWICKLUNG

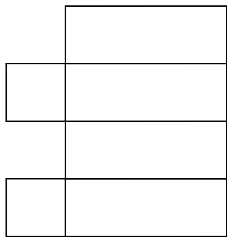
Aufgabe 17: Quadernetze erkennen — AFB I

Welche Abbildungen sind Quadernetze?

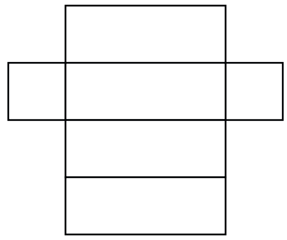
(A)



(B)



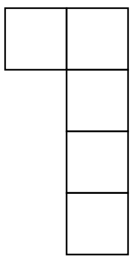
(C)



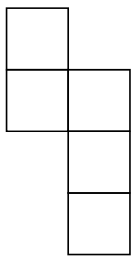
Aufgabe 18: Würfelnetz ergänzen — AFB II

Ergänze zu einem Würfelnetz.

a)



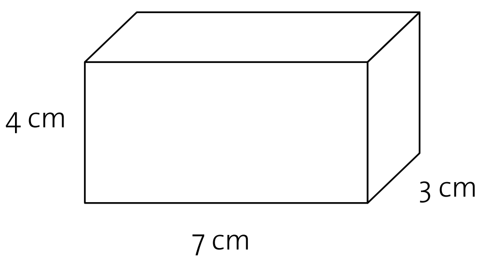
b)



Quelle: VERA 3 Mathematik 2013, landesweite Lösungshäufigkeiten a) 47 %, b) 36 %

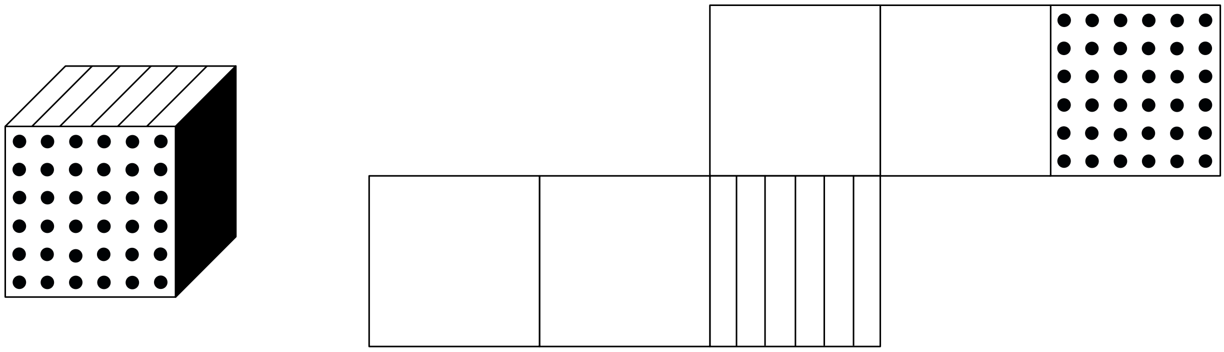
Aufgabe 19: Quadernetze zeichnen — AFB III

Zeichne zu diesem Quader zwei verschiedene Netze. Achte auf die Maßangaben.



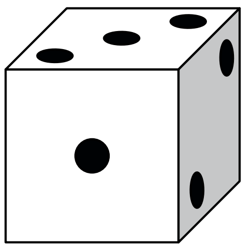
Aufgabe 20: Würfelfläche im Würfelnetz kennzeichnen AFB II

Der abgebildete Würfel hat nur eine schwarze Fläche.
Färbe im daneben dargestellten Netz dieses Würfels die schwarze Fläche ein.

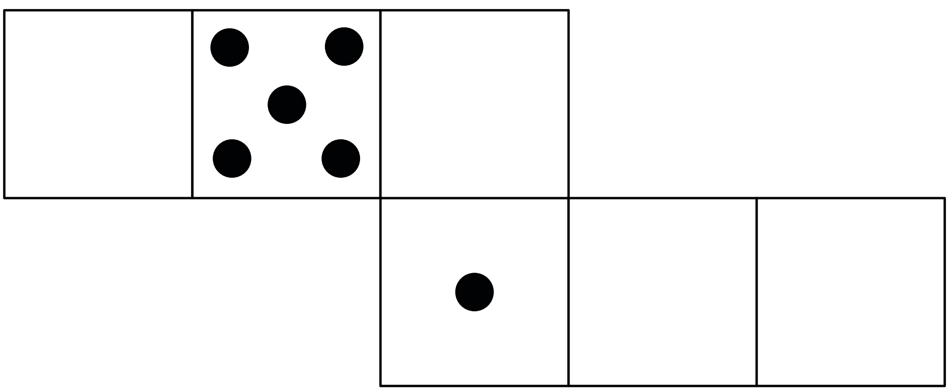


Aufgabe 21: Würfelpunkte im Netz und am Würfel erkennen AFB II

Auf Spielwürfeln sind die Punkte so angeordnet, dass die Summe der Punkte der gegenüberliegenden Seiten immer 7 ergibt.



a) Ergänze in dem Würfelnetz die Punkte in den leeren Flächen, so dass der abgebildete Spielwürfel entsteht.



☆ b) Du siehst auf der vorderen Fläche des Spielwürfels einen Punkt.
Du kippst den Würfel zweimal nach hinten. Wie viele Punkte sind dann auf der vorderen Fläche zu sehen?

Antwort: ___ Punkte

Aufgabe 22: Würfelpunkte erkennen — AFB II

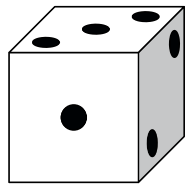
Paul hat einen Würfelturm aus zwei Spielwürfeln gebaut. Die obere Fläche zeigt einen Punkt.

a) Wie viele Punkte sind am Würfelturm insgesamt zu sehen?

Antwort: ____________________

Begründe deine Lösung.

Hinweis:



Die **Punkte** auf zwei sich **gegenüberliegenden** Seiten ergeben zusammen immer die **Summe 7.**

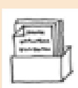
☆ b) Wie viele Punkte sind insgesamt sichtbar, wenn drei (vier, fünf, ...) Spielwürfel übereinandergestapelt sind und oben ein Punkt (zwei Punkte) zu sehen ist (sind)?

DIDAKTISCHE ANREGUNGEN FÜR DIE AUFGABEN 17 BIS 21

Die Bearbeitung dieser Aufgaben fordert von den Schülerinnen und Schülern, dass sie Quader und Würfel gedanklich auseinanderfalten, vorgegebene Netze zu Körpern zusammenklappen und dabei auch gedanklich drehen. Das Handeln und Experimentieren mit den Körpern ist unumgänglich für die erfolgreiche Bearbeitung dieser kopfgeometrischen Aufgaben. Es ist Grundvoraussetzung, dass die Schülerinnen und Schüler Körper in der Umwelt entdecken, Verpackungen untersuchen, dabei die Flächen erkennen, Lagebeziehungen erfassen und zunehmend die Eigenschaften der Körpernetze kennenlernen. Nur durch aktives Entdecken und Probieren ist es möglich, die Eigenschaften von Quadern und Würfeln zu erfassen und die Merkmale der Körpernetze zu erkennen. Die aktive Auseinandersetzung und das Kommunizieren über Entdeckungen sollten hierbei im Vordergrund stehen.

Die Bearbeitung der Aufgaben fördert
» das Erkennen und Benennen von Flächen und Körpern,
» das Beschreiben von Eigenschaften von Flächen und Körpern,
» das Erfassen von Lagebeziehungen (parallel, senkrecht) bei Flächen und Körpern,
» das mentale Operieren mit Flächen und Körpern,
» das exakte Zeichnen von Flächen mit Maßvorgaben.

Aufgabenvarianten
» gegenüberliegende Flächen mit gleicher Farbe in den verschiedenen Netzen einfärben
» gegenüberliegende Kanten/benachbarte Kanten in verschiedenen Netzen farbig kennzeichnen
» Ecken, die beim Zusammenfalten aneinanderstoßen, in den Netzen kennzeichnen
» verschiedene Würfelnetze beschriften (Spielwürfel: gegenüberliegende Flächen des Würfels ergeben die Summe 7)
» Verpackungen auseinandernehmen, Flächen und deren Anordnung untersuchen
» Körper auf Papier abwickeln und Netze entstehen lassen
» mit einzelnen Flächen und Klebeband Körper zusammensetzen und verschiedene Netze finden
» folgende Apps sind geeignet, um die Inhalte vertiefend und individualisierend aufzugreifen: Klipp Klapp (H. Etzold; nur für das iPad), Unfold (www.tappopotamus.com)

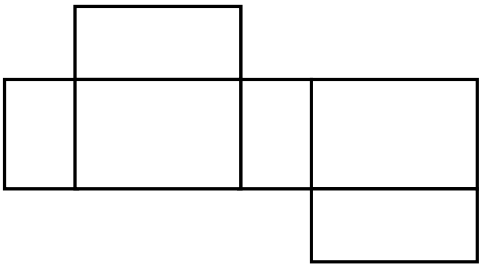


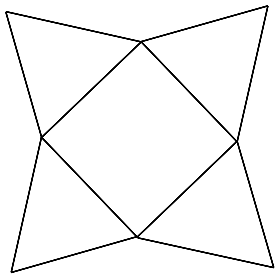
Lagebeziehungen:	parallel zueinander, senkrecht zueinander, gegenüberliegend
Flächen:	Viereck, Rechteck, Quadrat
Körper:	Würfel, Quader
Begriffe:	Ecke, Kante, Fläche

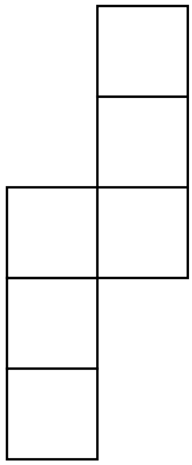
3.4.2 AUFGABEN ZUR KOMPETENZÜBERPRÜFUNG

1. Aufgabe — AFB I

Zu welchen Körpern gehören die Netze? Schreibe sie auf.







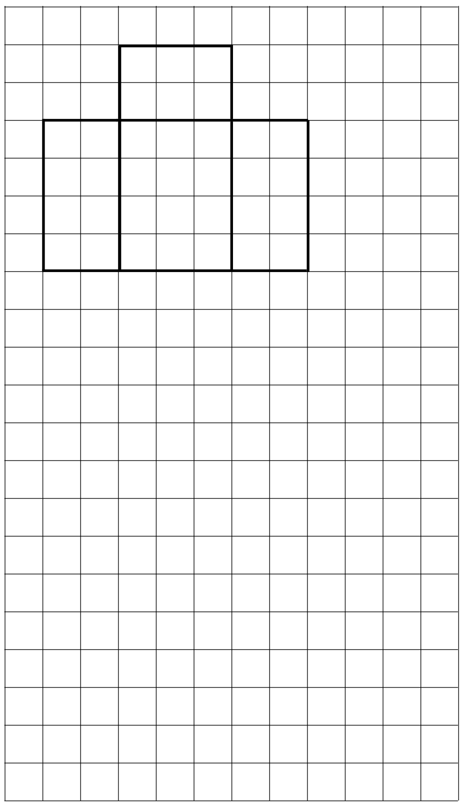
a) ____________________ b) ____________________ c) ____________________

2. Aufgabe — AFB I/II

a) Vervollständige das angefangene Quadernetz.

b) Welche Aussage passt zu einem Quader?
Kreuze an.

- ☐ Er hat 6 Ecken.
- ☐ Er hat 8 Kanten.
- ☐ Alle Flächen sind immer Quadrate.
- ☐ Alle Flächen sind Rechtecke.

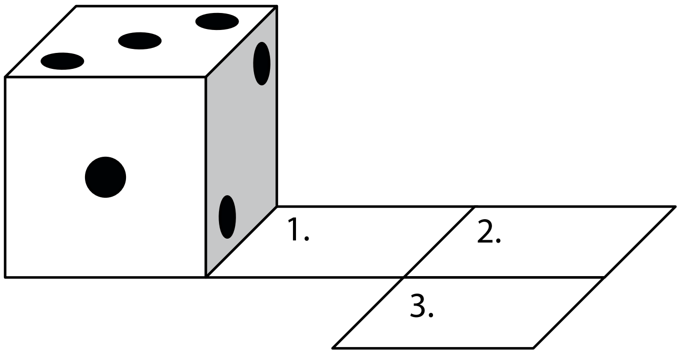


Quelle: ZKA 4 Mathematik 2015, landesweite Lösungshäufigkeiten a) 57 % AFB II, b) 49 % AFB I

3. Aufgabe AFB III

Die Punkte auf dem Spielwürfel sind so angeordnet, dass die Summe der Punkte der gegenüberliegenden Seiten immer 7 ergibt.
Der Spielwürfel wird entlang des aufgezeigten Weges gekippt.

Wie viele Punkte befinden sich auf der oberen Seite des Würfels, wenn dieser auf dem 3. Feld steht?



Antwort: __________ Punkte

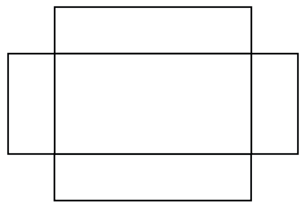
3.5 NETZE UND SCHRÄGBILDER VON QUADERN SKIZZIEREN UND ZEICHNEN (SCHULJAHRGÄNGE 5/6)

3.5.1 AUFGABEN ZUR KOMPETENZENTWICKLUNG

ZENTRALE KLASSENARBEIT MATHEMATIK SCHULJAHRGANG 6 (SEKUNDARSCHULE) SCHULJAHR 2011/2012

Aufgabe 6	**AFB II**

Es ist ein unvollständiges Netz eines Quaders dargestellt.



a) Vervollständige das Netz.
b) Berechne das Volumen des Quaders.
Entnimm die notwendigen Maße der Zeichnung.

Die Schülerinnen und Schüler zu befähigen, Netze und Schrägbilder von Quadern – auch für den Spezialfall des Würfels – zu skizzieren und zu zeichnen (vgl. nebenstehende Aufgabe), ist ein Ziel des Mathematikunterrichts in den Schuljahrgängen 5 und 6. Insbesondere wird damit die allgemeine mathematische Kompetenz *Mathematische Darstellungen verwenden* entwickelt. Neben der Ausbildung fachspezifischer Fähigkeiten – insbesondere der Raumvorstellung und des räumlichen Denkens – wird damit auch ein Beitrag zur allgemeinen Lebensvorbereitung geleistet durch:

» Visualisieren von Objekten bzw. von Zusammenhängen aus der Umwelt,
» Lesen bildlicher Darstellungen,
» Entwickeln feinmotorischer Fähigkeiten sowie von Fähigkeiten im Umgang mit Zeichengeräten,
» Entwickeln von Fähigkeiten und Bereitschaften zu Sorgfalt und Genauigkeit (LISA, 2010)

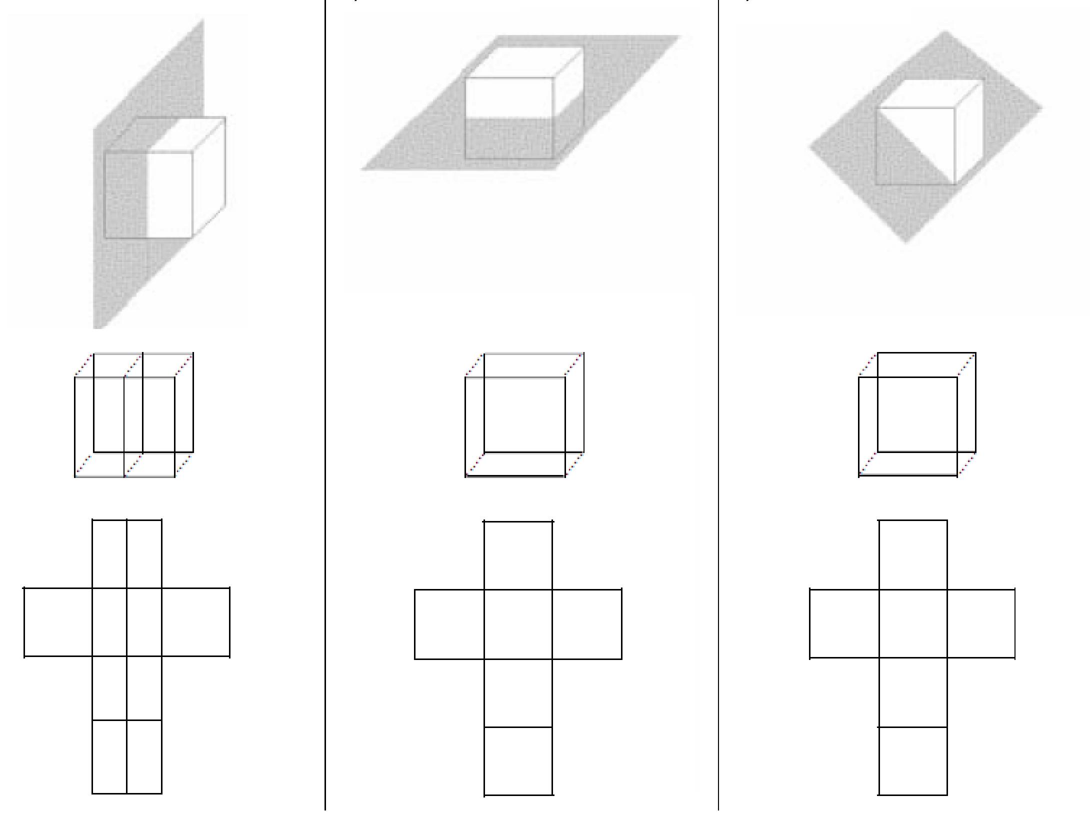
Auch im Zusammenhang mit der Entwicklung dieser inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenz bietet es sich an, das Skizzieren und Zeichnen voneinander zu diskriminieren und auch den Schülerinnen und Schülern die Unterschiede hinsichtlich der Ansprüche beider Aufforderungen zu verdeutlichen. So handelt es sich beim Skizzieren in der Regel um ein Freihandzeichnen ohne Anspruch auf Maßstäblichkeit, obgleich wesentliche Informationen des Dargestellten sachgerecht widergespiegelt werden (LISA, 2010). Diese Anforderungen an das Skizzieren verdeutlichen, dass die Fähigkeit des Skizzierens im Mathematikunterricht erworben werden muss und keineswegs gering zu schätzen ist. Insofern sollten das Skizzieren oder Zeichnen beim Darstellen eines Quaders im Netz oder Schrägbild zieladäquat bedacht werden.

Die folgende aus den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss entnommene Aufgabe verdeutlicht die Zielsetzung beim Erwerb dieser Kompetenz.

Aufgabe 23: Würfel AFB II

Ein Würfel wird längs der jeweils vorgegebenen Ebene durchgeschnitten. Zeichne wie im Beispiel die Schnittkanten im Schrägbild und im Netz ein:

Beispiel a) b)



Quelle: aus KMK, 2003, Seite 27

DIDAKTISCHE ANREGUNGEN FÜR DIE AUFGABE 23

Das Skizzieren und Zeichnen von Netzen und Schrägbildern von Quadern – auch für den Spezialfall des Würfels – sind laut Fachlehrplan Mathematik Gymnasium/Berufliches Gymnasium bzw. Sekundarschule schulformunabhängig zu entwickelnde inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen im Kompetenzschwerpunkt *Umfang, Flächeninhalt und Volumen*.
Die Aufgabe 23 illustriert diese Kompetenz. Für die erfolgreiche Bearbeitung ist es erforderlich, dass die Schülerinnen und Schüler über räumliches Vorstellungsvermögen verfügen und die allgemeine mathematische Kompetenz *Verwenden von mathematischen Darstellungen* im Rahmen der Leitidee *Raum und Form* erworben haben.

Die in der Aufgabe gezeigten Schnittebenen sind von den Schülerinnen und Schülern in das zugehörige Schrägbild und Netz zu übertragen. Diese Aufgabe ist im Anforderungsbereich II zu verorten, da die Schülerinnen und Schüler Beziehungen zwischen Darstellungsformen erkennen und zwischen ihnen wechseln müssen.

Hinweise zur Weiterarbeit

Differenzierung

Durch geringfügige und leicht durchzuführende Änderungen bietet die Aufgabe auch die Möglichkeit, Schülerinnen und Schüler zu bedienen, die schon in einem höheren Maße mental repräsentieren und kognitive Transformationsprozesse durchführen können. Gesteuert werden kann der Anspruch der Aufgabe zum Beispiel über

» das Entfernen des Beispiels,
» das Verwenden eines Quaders, der kein Würfel ist,
» über die Anzahl und Lage der Schnittebenen,
» durch die nicht bildhafte Darstellung der Schnittebene, sondern deren Beschreibung.

Aber auch das Zeichnen nur eines bestimmten Teils des Netzes oder des Schrägbildes würde eine ungleich anspruchsvollere Tätigkeit erfordern. Denkbar ist ebenso, dass die durch einen Schnitt entstehenden Teilkörper benannt werden und die Schülerinnen und Schüler die zugehörige Schnittebene bzw. Schnittkanten einzeichnen.

Zulassung von Hilfsmitteln

Durch die Zulassung von Körpermodellen zum praktisch-gegenständlichen Handeln, um sich die Schnittkante im Schrägbild und Netz bewusst zu machen, ergeben sich Differenzierungsmöglichkeiten.

Vernetzung mit anderen Leitideen

Der Würfel wird durch die Schnittebene in zwei Teilkörper zerlegt. Die Aufgabe kann Ausgangspunkt dafür sein, über das Volumen und den Oberflächeninhalt von Teilkörpern zu sprechen, wodurch die Leitidee *Messen* zur Anwendung kommt.

Vielfältige allgemeine mathematische Kompetenzen bedienen

Gleichwohl kann neben der allgemeinen mathematischen Kompetenz *Verwenden von mathematischen Darstellungen* das mathematische Kommunizieren gefördert werden. Dazu gehört es, dass die Schülerinnen und Schüler ihre Überlegungen, Lösungswege beziehungsweise Ergebnisse dokumentieren, verständlich machen und präsentieren. Im besonderen Maße kann diese Kompetenz entwickelt werden, wenn die Schülerinnen und Schüler beauftragt werden, die Lage der Schnittebenen so zu beschreiben, dass bestimmte Teilkörper entstehen oder umgekehrt.

Fortführung in den weiterführenden Schuljahrgängen

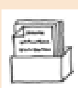
Das erfolgreiche Bearbeiten dieser Aufgabe kann als Prädiktor für den Erwerb der Kompetenz *Skizzieren und Zeichnen von Netzen und Schrägbildern von Quadern* gesehen werden. Schülerinnen und Schüler, die bei der Bewältigung dieser Aufgabe keine Probleme haben, werden in der Lage sein, ähnliche Anforderungssituationen bewältigen zu können. In den weiteren Schuljahrgängen lernen die Schülerinnen und Schüler die Darstellungsform des Zweitafelbildes kennen. Dann kann diese Aufgabe in leicht adaptierter Fassung wiederholt eingesetzt werden, indem die Darstellungsform des Zweitafelbildes ergänzt wird. Mithilfe einer geänderten Aufgabe kann überprüft werden, ob die Schülerinnen und Schüler befähigt sind, Körperdarstellungen von einer Form in andere zu transformieren. Ausgangspunkt kann neben der Darstellung im Schrägbild, Netz oder Zweitafelbild auch die verbale Beschreibung der Schnittebene sein. Ferner kann der verwendete Körper des Würfels durch andere Körper ersetzt werden, zum Beispiel Prisma, Pyramide, Kreiszylinder, Kegel oder Kugel. Die durch eine Schnittebene entstehenden Teilkörper lassen sich wieder hinsichtlich ihres Volumens oder Oberflächeninhaltes untersuchen. Insbesondere kann die Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* fokussiert werden, wenn zum Beispiel über den Zusammenhang zwischen Lage der Schnittebene und dem Volumen eines Teilkörpers reflektiert wird.

Auch in der Sekundarstufe II kann diese Aufgabe Gegenstand des Mathematikunterrichts sein, wenn die Schülerinnen und Schüler befähigt werden, geometrische Objekte des Raumes zu koordinatisieren oder Koordinaten von Punkten geometrischer Körper, die in einem räumlichen Koordinatensystem dargestellt sind, zu ermitteln.

Mit der in der obigen Aufgabe vorkommenden Schnittebene sollten die Schülerinnen und Schüler nicht in der Erstbegegnung zum Erwerb der Kompetenz *Netze und Schrägbilder von Quadern skizzieren und zeichnen* konfrontiert werden. So bietet sich für die Entwicklung dieser inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenz eine in der zentralen Klassenarbeit 6 Mathematik 2017 (Sekundarschule) vorkommende Aufgabe an (vgl. Aufgabe 24).

Weitere Anregungen unter:

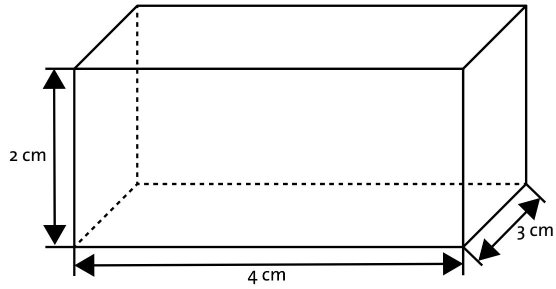
» https://mathe.aufgabenfuchs.de/koerper/koerper-erkennen.shtml (abgerufen am 11.05.2020)
» https://lernarchiv.bildung.hessen.de/sek/mathematik/raum/prismen/schraegbild/schraegbild/index.html (abgerufen am 11.05.2020)



Würfel, Quader, Schrägbild, Körpernetz, Kante, Schnittkante, Ebene

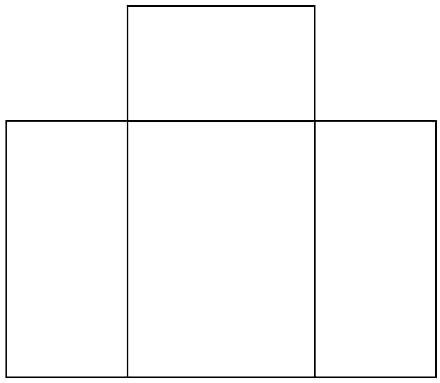
Aufgabe 24: Quadernetz ergänzen **AFB II**

Ein Quader hat die Kantenlängen 4 cm, 3 cm und 2 cm. Die Abbildung zeigt einen solchen Quader mit den zugehörigen Abmessungen.



(Abbildung nicht maßstäblich)

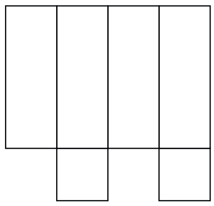
Ergänze die folgende Zeichnung so, dass ein vollständiges Quadernetz dieses Quaders entsteht.



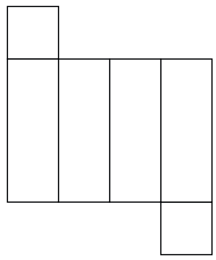
Aufgabe 25: Quadernetz ergänzen AFB II

Zwei von diesen Figuren sind Netze eines Quaders.
Entscheide, welche es sind.
Kreuze sie an.

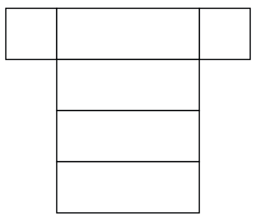
A



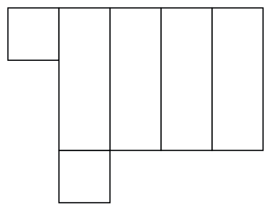
B



C



D



DIDAKTISCHE ANREGUNGEN FÜR DIE AUFGABEN 24 UND 25

Diese und ähnliche Aufgaben zur Kopfgeometrie können gezielt im Mathematikunterricht zur Förderung der Raumvorstellung und des räumlichen Denkens eingesetzt werden. Mit Aufgaben zur Kopfgeometrie sind solche gemeint, bei denen Schülerinnen und Schüler geometrische Probleme lediglich im Kopf lösen.
Bei Kopfgeometrie-Aufgaben lassen sich drei Phasen unterscheiden (Senftleben, 1996):

1. **Phase der Aufgabenstellung:** Das Problem wird nicht nur mündlich, sondern als Text und unterstützend auch durch ein Bild oder ein geometrisches Modell geschildert.
2. **Phase des Arbeitens im Kopf:** Zur eigentlichen Lösung des Problems werden tatsächlich keine Hilfsmittel verwendet.
3. **Phase der Ergebnispräsentation:** In diesem Zusammenhang sind Hilfsmittel wieder erlaubt.

Je nach Differenzierungsgrad können in der zweiten Phase gegebenenfalls auch Hilfsmittel zum Einsatz kommen.

Auch bei der Aufgabe 25 im Anforderungsbereich II wechseln die Schülerinnen und Schüler zwischen unterschiedlichen Darstellungsformen. Das Vervollständigen des Quadernetzes gelingt, wenn die Schülerinnen und Schüler die Abmessungen des Quaders entweder aus der Abbildung oder aus dem Text entnehmen.

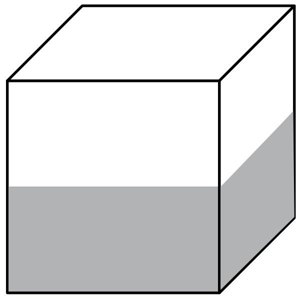
Ideen zur Differenzierung

» Abmessungen des Quaders durch Abbildung oder Text vorgeben
» vollständiges Quadernetz vorgegeben
» Anzahl der möglichen Quadernetze reflektieren (Aufgabe 25, aus: zentrale Klassenarbeit 6 Mathematik 2008 , Sekundarschule)

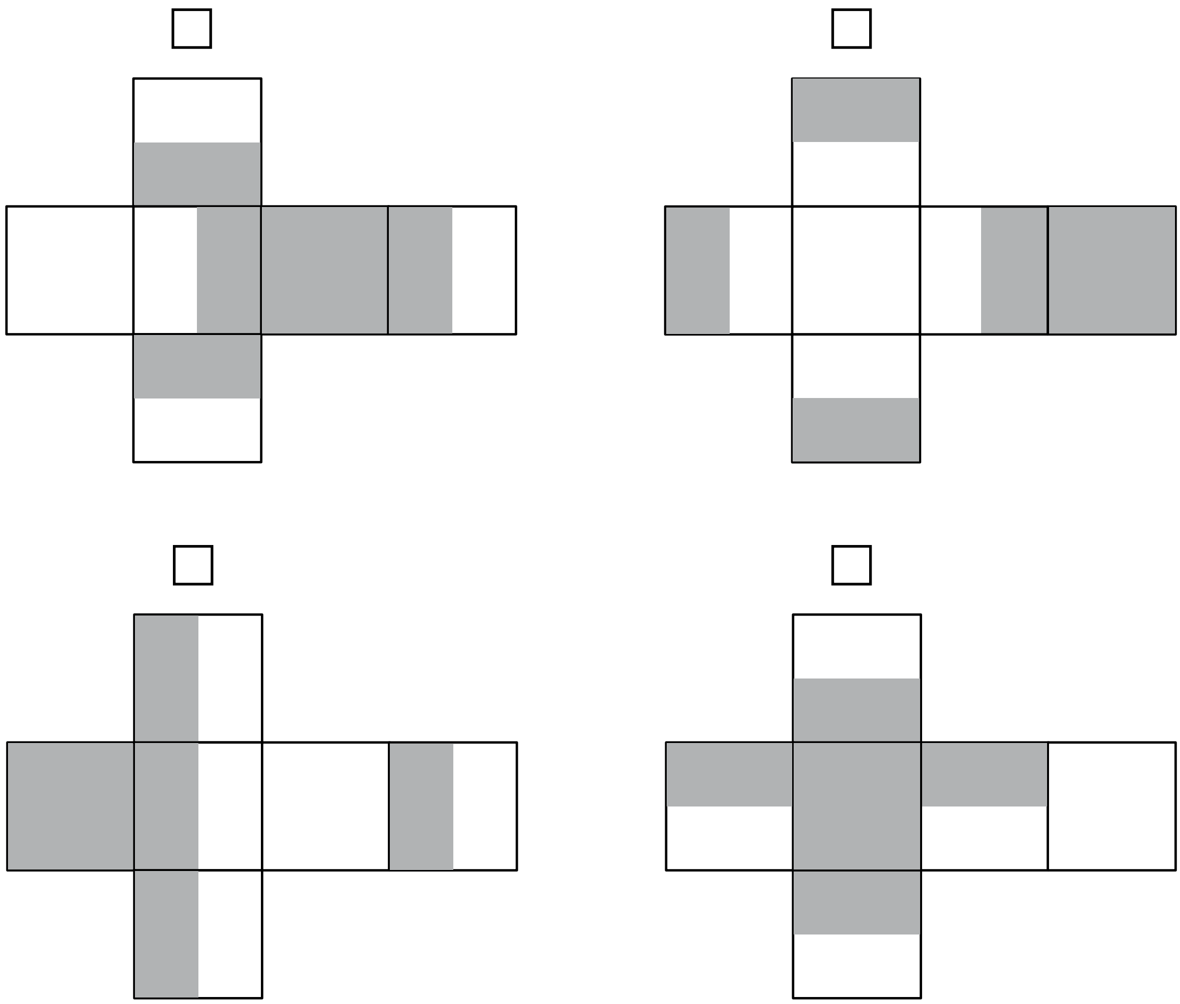
3.5.2 AUFGABEN ZUR KOMPETENZÜBERPRÜFUNG

1. Aufgabe **AFB III**

Ein Würfel wurde zur Hälfte in Farbe getaucht (siehe Abbildung).



Kreuze an, welches Netz zum eingefärbten Körper passt.



Quelle: ZKA 6 Mathematik 2012 (Gymnasium)

2. Aufgabe — AFB I

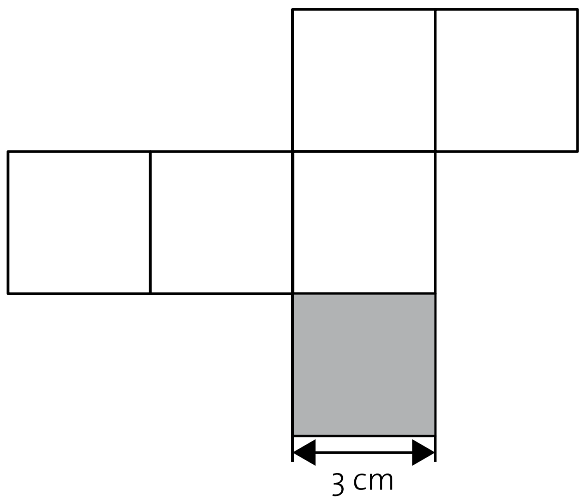
Ein Quader hat die Kantenlängen a = 6 cm, b = 8 cm, c = 4 cm.

Zeichne ein Schrägbild dieses Quaders.

Quelle: ZKA 6 Mathematik 2012 (Gymnasium)

3. Aufgabe — AFB I/II

In der Abbildung ist das Netz eines Körpers dargestellt. Dieses Netz besteht aus sechs gleich großen Quadraten.



(Abbildung nicht maßstäblich)

a) Gib den Flächeninhalt der markierten Fläche an.

.... cm^2

b) Entscheide jeweils, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.
Kreuze an.

	wahr	falsch
(1) Die Abbildung zeigt das Netz eines Würfels.		
(2) Die Abbildung zeigt das Netz eines Quaders.		

Quelle: ZKA 6 Mathematik 2018 (Sekundarschule)

3.6 OBERFLÄCHENINHALT UND VOLUMEN IN SACHSITUATIONEN ERKENNEN UND BERECHNEN (SCHULJAHRGÄNGE 5/6)

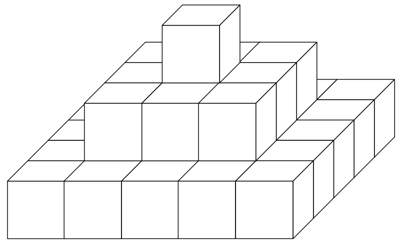
3.6.1 AUFGABEN ZUR KOMPETENZENTWICKLUNG

Unabhängig von der Schulform sind die Kompetenzen *Oberflächeninhalt und Volumen in Sachsituationen erkennen und berechnen* laut Fachlehrplan Mathematik Sekundarschule bzw. Gymnasium/Berufliches Gymnasium zu entwickeln.
Am Beispiel einer in den zentralen Klassenarbeiten 6 Mathematik 2016 eingesetzten Aufgabe wird gezeigt, wie die in zentralen Leistungserhebungen vorkommenden Aufgaben sowohl für die Kompetenzentwicklung, als auch für die Kompetenzüberprüfung nutzbar gemacht beziehungsweise adaptiert werden können. Die Aufgabe 6 der zentralen Klassenarbeit 6 Mathematik (Sekundarschule) thematisiert „Würfelpyramiden“ (vgl. Aufgabe 26).

**ZENTRALE KLASSENARBEIT MATHEMATIK SCHULJAHRGANG 6 (SEKUNDARSCHULE)
SCHULJAHR 2015/2016**

Aufgabe 26: Würfelpyramide	**AFB II/III**

Die Abbildung zeigt eine dreischichtige „Würfelpyramide“. Alle Schichten sind vollständig mit gleichgroßen Würfeln ausgelegt. Jeder Würfel hat eine Katenlänge von 2 cm.



a) Ermittle das Volumen dieser Würfelpyramide.

b) Diese Würfelpyramide soll zu einem Quader mit einem Volumen von 600 cm^3 ergänzt werden.
Ermittle die Anzahl der dafür zusätzlich benötigten Würfel.

DIDAKTISCHE ANREGUNGEN FÜR DIE AUFGABE 26

In der ersten Teilaufgabe ist das Volumen einer dreischichtigen Würfelpyramide zu ermitteln. Zur Lösung dieser im Anforderungsbereich II verorteten Aufgabe ist es nötig,

» die Anzahl der Würfel zu ermitteln, aus der diese Würfelpyramide besteht,
» das Volumen eines Würfels mit der Kantenlänge von 2 cm zu bestimmen und
» das Volumen der Würfelpyramide zu berechnen.

Die Ermittlung der Anzahl, der für die Ergänzung dieser Würfelpyramide zu einem Quader mit einem Volumen von 600 cm³ zusätzlich benötigten Würfel, ist die Anforderungssituation in der zweiten Teilaufgabe (Anforderungsbereich III).

Fokus ist die Leitidee *Raum und Form*

Im Kern geht es bei dieser Aufgabe darum, gedanklich mit einem aus Würfeln zusammengesetzten Körper zu operieren. Dieser Körper kann nicht mit einem bekannten geometrischen Körper – schon gar nicht mit dem einer Pyramide – gleichgesetzt werden. Es stellt sich somit ein Problem, dessen Lösung das Zerlegen eines Körpers in Teilkörper erforderlich macht. Deshalb wird diese Aufgabe der Leitidee *Raum und Form* zugeordnet. Diese Aufgabe könnte aber auch der Leitidee *Zahl* zugeordnet werden, da die Anzahl der Würfel ermittelt werden muss,

» aus der die dreischichtige Würfelpyramide besteht bzw.
» die für die Ergänzung der dreischichtigen Würfelpyramide zu einem Quader nötig ist.

Andererseits ließe sich auch eine Einordnung in die Leitidee *Messen* rechtfertigen, da auch Volumenberechnungen durchgeführt werden.

Durch die räumliche Darstellung einer dreischichtigen Würfelpyramide wird die Kompetenz *mathematische Darstellungen verwenden* adressiert. Es ist auch die Kompetenz mit *symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen* erforderlich, da Rechnungen und Zählstrategien nötig sind.

Damit zielt diese Aufgabe ganz klar auf Raumvorstellungen und räumliches Denken von Schülerinnen und Schülern ab. Deutlich werden in den Teilaufgaben auch die unterschiedlichen Facetten des räumlichen Vorstellungsvermögens.

Die erste Teilaufgabe erfordert insbesondere räumliches Orientieren und Vorstellen. In der zweiten Teilaufgabe ist auch räumliches Denken erforderlich, d. h. die Fähigkeit, mit Objekten – in diesem Fall mit der dreischichtigen Würfelpyramide und einem Quader – in Gedanken zu operieren. Notwendig ist auch, dass zusätzlich die Informationen des Einleitungstextes berücksichtigt werden, um zu erkennen, dass alle Schichten

» vollständig und
» mit gleichgroßen Würfeln

ausgelegt sind. Diese Aspekte sind von der Information zur Kantenlänge der Würfel zu diskriminieren, da diese erst bei der Berechnung des Volumens eines Würfels benötigt wird.

Zugänge zur Lösung

Am Beispiel der Ermittlung der Anzahl der Würfel werden unterschiedliche Vorgehensweisen aufgezeigt.

Die Schülerinnen und Schüler ermitteln die Gesamtanzahl, in dem sie

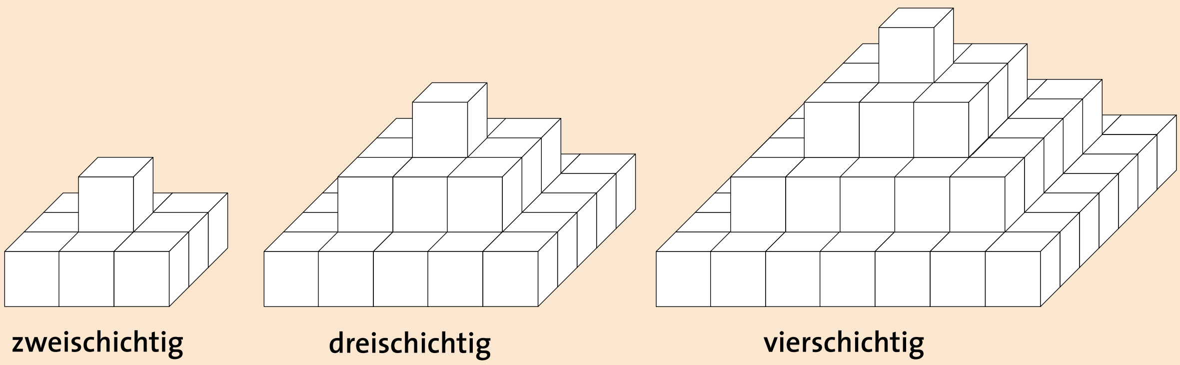
» sich im Raum orientieren und gedanklich auf die anderen Seiten des Körpers wechseln oder
» den Standpunkt des Betrachters gedanklich nicht ändern und stattdessen den Körper drehen.

Da der Körper der Würfelpyramide in beiden Fällen unverändert bleibt, wird hier die Fähigkeit des räumlichen Denkens nicht verlangt. Erforderlich ist dies erst bei der Bewältigung der zweiten Teilaufgabe.

Doch in welcher Weise kann diese Aufgabe in adaptierter Form so im Unterricht eingesetzt werden, dass die Schülerinnen und Schüler befähigt werden, die in der zentralen Klassenarbeit 6 Mathematik 2016 vorkommende Aufgabe zu lösen?

In der unterrichtlichen Erstbegegnung bietet es sich an, zunächst gegenständlich zu arbeiten, d. h. die Schülerinnen und Schüler bauen Würfelpyramiden nach Vorgabe. Dieses Vorgehen knüpft kohärent an das Vorgehen und an die in der Primarstufe erworbenen Kompetenzen an. In einem ersten Schritt kann deshalb folgende Aufgabenstellung formuliert werden:

Aus Würfeln können „Würfelpyramiden“ nach folgendem Muster gebaut werden.
Bei jeder Würfelpyramide sind alle Schichten mit gleichgroßen Würfeln ausgelegt.
Gib die Anzahl der für den Bau einer zwei-, drei-, vier- und fünfschichtigen Würfelpyramide nötigen Würfel an.



(Abbildung nicht maßstäblich)

Diese Aufgabe bietet auf verschiedenen Ebenen Differenzierungsmöglichkeiten:

» Differenziert bietet die Lehrkraft Hilfsmittel an.
» Der Aufbau der Würfelpyramiden kann optisch durch entsprechende Darstellungen unterstützt werden. Das begründete Argument gegen die Repräsentation von Würfelpyramiden kann aber auch sein, dass ihr Aufbau rein textbasiert beschrieben wird.
» Auch die Stufenanzahl kann differenziert werden. Im Optimalfall gelingt den Schülerinnen und Schüler sogar eine Verallgemeinerung für n Stufen.
» Das hier gewählte halboffene Aufgabenformat kann durch andere Aufgabenformate abgelöst werden (z. B. Multiple-Choice-Format).

Schnell werden die Schülerinnen und Schüler ein gewisses Muster erkennen, wie nachfolgende Tabelle veranschaulicht.

Anzahl der Schichten	Anzahl der dafür benötigten Würfel
1	1
2	1 + 9
3	1 + 9 + 25
4	1 + 9 + 25 + 49
5	1 + 9 + 25 + 49 + 81

Vorteil dieser Form der Dokumentation ist, dass die Schülerinnen und Schüler erkennen:
Die Anzahl der Würfel einer Schicht hängt von der Anzahl der Würfel der vorher betrachteten Würfelpyramide ab. Insbesondere muss die Anzahl der Würfel bei steigender Stufenzahl nicht noch einmal ermittelt werden, sondern es genügt das Addieren der Anzahl der neu hinzukommenden Würfel der untersten Schicht. Es ergibt sich ganz leicht der Begriff der rekursiven Bildungsvorschrift. Insbesondere erkennen die Schülerinnen und Schüler, dass alle vorkommenden Zahlen Quadratzahlen sind – mit der Besonderheit, dass durch die spezielle Wahl des Aufbaus dieser Würfelpyramiden stets nur ungerade Zahlen quadriert werden. Dieser Befund gibt Anlass für zwei Lerngelegenheiten, die an dieser Stelle nicht unerwähnt bleiben sollen:

1. Das Aufschreiben der Summanden für eine mehrschichtige Würfelpyramide ermöglicht die Einführung oder Wiederholung einer mathematischen Kurzschreibweise in Form des Summenzeichens. Für eine n-stufige Würfelpyramide gilt die Anzahl der dafür benötigten Würfel:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2$$

2. Die Frage nach der Anzahl der für den Bau einer 20-schichtigen Würfelpyramide notwendigen Würfel kann Anlass sein, um Grenzen einer möglicherweise gefundenen rekursiven Bildungsvorschrift zu besprechen oder eine explizite Bildungsvorschrift zu forcieren.
   Wie sich leicht mit vollständiger Induktion zeigen lässt, gilt nämlich:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{n\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}{3}$$

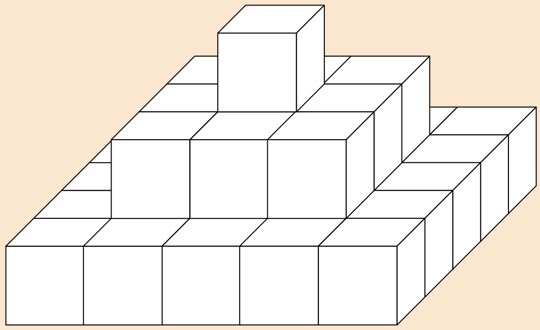
Das Potenzial dieser Aufgabe wird somit auch in Hinblick auf den Einsatz des Mathematikunterrichts in den weiteren Schuljahrgängen aufgezeigt. Ebenso wird damit die Bandbreite an erwerbbaren mathematischen Kompetenzen deutlich, wenn andere Leitideen zum Zuge kommen.

Den Erwerb vielfältiger mathematischer Kompetenzen fördern

Die Kompetenzen *mathematisch kommunizieren* und *mathematisch argumentieren* können gefördert werden, wenn Schülerinnen und Schüler ihre Überlegungen und Lösungswege verständlich darstellen. Es wird dem überwiegenden Teil der Lernenden jedoch schwerfallen, die Lösungswege verständlich zu Papier zu bringen. Häufig wird einfach nur zu lesen sein, dass die Anzahl der Würfel durch „Auszählen“ bestimmt wurde. Aufgabe des Unterrichtsgespräches muss es durch gezielte Nachfragen sein, Fehlkonzepte aufzudecken. In der Breite kann dies jedoch durch einen bewussten Einsatz eines bestimmten Aufgabenformates überprüft werden. Die Möglichkeit des Multiple-Choice-Formates soll hier vorgestellt werden. Ein Auftrag könnte lauten:

Aus Würfeln können „Würfelpyramiden“ gebaut werden (vgl. Abbildung).
Bei jeder Würfelpyramide sind alle Schichten mit gleichgroßen Würfeln ausgelegt.
Wie viele Würfel sind für den Bau der nebenstehenden Würfelpyramide nötig?
Kreuze an.

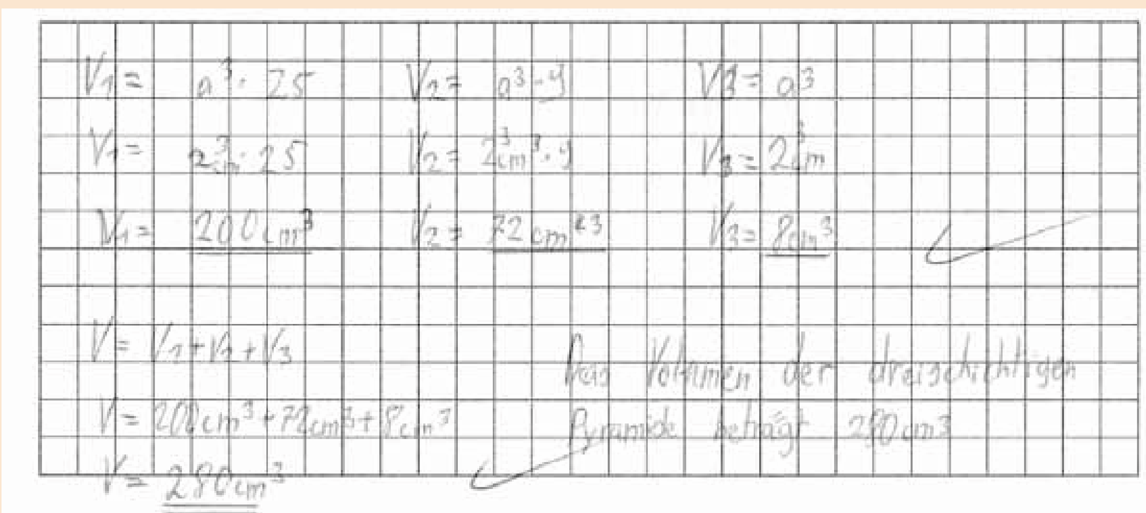
☐ (35) ☐ (22) ☐ (25)



Neben der korrekten Antwort (35) müssen die falschen Antwortmöglichkeiten, die sogenannten Distraktoren, gut überlegt sein, um mögliche Fehlkonzepte der Schülerinnen und Schüler abzubilden. Ein möglicher Distraktor könnte zum Beispiel 22 sein: Beim Ankreuzen dieses Distraktors haben die Schülerinnen und Schüler offenbar nur diejenigen Würfel gezählt, die in der Abbildung erkennbar sind und nicht durch andere Würfel verdeckt werden. Die Wahl des Distraktors 25 lässt vermuten, dass der Schüler oder die Schülerin die Würfel im „Inneren“ der Würfelpyramide vernachlässigt hat.

Die Anzahl der Würfel als Ausgangspunkt für die Berechnung des Volumens

Ausgangspunkt für diese Ausführungen ist es, das Volumen einer dreischichtigen Würfelpyramide zu ermitteln. Geprüft werden muss, welche Aspekte primär Gegenstand der unterrichtlichen Betrachtung sein sollen. Gelingt die Ermittlung der korrekten Anzahl der Würfel für den Bau einer dreischichtigen Würfelpyramide problemlos, so stellt die Berechnung des Volumens einer solchen Würfelpyramide eine zusätzliche Hürde dar, da eine weitere Information im Text erfasst werden muss. Schließlich muss es den Schülerinnen und Schülern dann noch gelingen, die Anzahl der Würfel mit der Maßzahl des Volumens zu multiplizieren, um die Maßzahl des Volumens der dreischichtigen Würfelpyramide zu erhalten. Selbstredend ist, dass an dieser Stelle Folgefehler unbedingt zu berücksichtigen sind, insofern Zwischenschritte die weiteren Rechnungen nicht wesentlich vereinfachen. In der Erstbegegnung kann sogar die Kantenlänge 1 cm gewählt werden, sodass die Anzahl der Würfel mit der Maßzahl des Volumens übereinstimmt.
Die nachfolgende Abbildung dokumentiert eine mögliche Schülerlösung für die in der zentralen Klassenarbeit vorkommende Aufgabe.



Lösungen von Schülerinnen und Schülern eignen sich hervorragend im Mathematikunterricht, um die Kompetenz *mathematisch kommunizieren* zu fördern. Hierbei geht es insbesondere darum, dass die Lernenden die Fähigkeit erwerben, auf Äußerungen von anderen zu mathematischen Inhalten einzugehen oder Lösungswege zu bewerten. Die gezeigte Schülerlösung dokumentiert einen Lösungsweg, bei dem

- zunächst das Volumen einer jeden Schicht ermittelt und dann
- das Volumen der dreischichtigen Würfelpyramide durch Addition der Volumina der einzelnen Schichten berechnet wird.

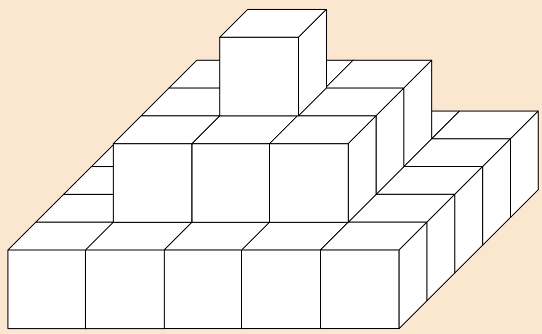
Rückmeldungen von Lernenden zu Lernenden sind dann besonders hilfreich, wenn ein konstruktives Feedback erfolgt, um die Dokumentation von Lösungswegen zu optimieren. Insbesondere stellt sich hierbei die Frage, in welcher Weise der Lernende die Anzahl der Würfel pro Schicht ermittelt hat. Um solche Kompetenzen gezielt in den Fokus einer Überprüfung zu nehmen, muss dasjenige Signalwort gewählt werden, mit dem diese Kompetenz auch gezeigt werden kann.

Schülerinnen und Schüler können aber auch mit Aufgaben konfrontiert werden, in denen ein Lösungsweg zur Bewältigung einer Aufgabe dargestellt wird, wie die folgende Aufgabe zeigt. Der zugehörige Auftrag könnte folgendermaßen lauten:

Aus Würfeln können „Würfelpyramiden“ gebaut werden (vgl. Abbildung). Bei jeder Würfelpyramide sind alle Schichten mit gleichgroßen Würfeln mit der Kantenlänge 1 cm ausgelegt. Piet berechnet das Volumen der dargestellten Würfelpyramide wie folgt:

$$\mathbf{5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1\,cm^3 - 40 \cdot 1\,cm^3 = \ldots}$$

Berechne ausgehend von diesem Ansatz das Volumen dieser Würfelpyramide und erkläre das Zustandekommen dieses Ansatzes.

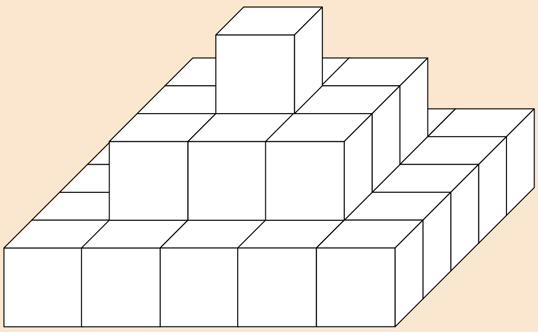


Zum Erklären dieses Ansatzes werden Raumvorstellungen und das räumliche Denken im besonderen Maße benötigt. Im Unterrichtsgespräch empfiehlt es sich, die einzelnen Komponenten des Terms zunächst isoliert zu betrachten und erst dann zu verknüpfen. So müssen die Schülerinnen und Schüler in einem ersten Schritt erkennen, dass der Term $5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1\,cm^3$ das Volumen eines Körpers beschreibt, der aus 75 Würfeln mit der Kantenlänge 1 cm aufgebaut ist. Mit dem Verweis auf die drei Schichten der Würfelpyramide werden die Schülerinnen und Schüler gegebenenfalls erkennen, dass damit ein Quader mit den Kantenlängen 5 cm, 5 cm und 3 cm beschrieben werden kann, der diese Würfelpyramide enthält. In einem zweiten Schritt muss der Term $40 \cdot 1\,cm^3$ gedeutet werden, wobei die Fähigkeit, ein Objekt gedanklich reproduzieren zu können, besonders erforderlich ist. Die Schülerinnen und Schüler müssen nämlich erkennen, dass damit gerade die 40 Würfel gemeint sind, die die dreischichtige Würfelpyramide zu dem oben beschriebenen Quader ergänzen.

Die Schwierigkeit der Aufgabe kann zum Beispiel sehr leicht variiert werden durch

» die Wahl der Kantenlängen der Würfel oder
» die Anzahl der Schichten der Würfelpyramide.

Die aus der zentralen Klassenarbeit 6 Mathematik 2016 (Sekundarschule) vorkommende Aufgabe wird durch die gezeigte Teilaufgabe fortgeführt.



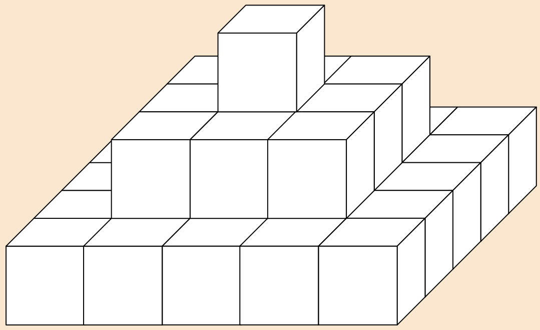
(Abbildung nicht maßstäblich)

Diese Würfelpyramide soll zu einem Quader mit einem Volumen von 600 cm^3 ergänzt werden. Ermittle die Anzahl der dafür zusätzlich benötigten Würfel.

Die eben durchgeführten Betrachtungen zur Repräsentation eines Ansatzes zur Berechnung des Volumens einer dreischichtigen Würfelpyramide können Ausgangspunkt für die Kompetenzentwicklung sein. Das Operieren mit Objekten in Gedanken wird durch diese Teilaufgabe besonders gefordert. Der Beginn einer Lösung dieser Aufgabe ist eine dreischichtige Würfelpyramide, die aus Würfeln mit einer Kantenlänge von 2 cm aufgebaut ist. Zur Lösung bieten sich mindestens zwei heuristische Strategien an. Hierunter sind grundsätzliche Vorgehensweisen zu verstehen, mit denen man in einer Problemsituation agieren kann, wenn das gestellte Problem im Wesentlichen verstanden wurde. Beispiele für heuristische Strategien sind zum Beispiel das systematische Probieren, das Vorwärts- beziehungsweise Rückwärtsarbeiten oder eine Kombination daraus. Exemplarisch wird an dieser Stelle das Rückwärtsarbeiten thematisiert, wobei zunächst der Zielzustand in den Fokus gerückt wird. Ausgangspunkt ist dazu ein Quader mit einem Volumen von 600 cm^3 . Ein Würfel mit einer Kantenlänge von 2 cm hat ein Volumen von 8 cm^3. Folglich muss dieser Quader aus 75 solcher Würfel bestehen. Eine dreischichtige Würfelpyramide besteht – wie bereits gezeigt wurde – aus 35 Würfeln. Demnach muss die Würfelpyramide um 40 weitere Würfel ergänzt werden, sodass ein Quader entsteht.

Die Aufgabe macht noch keine Aussage darüber, in welcher Weise diese Würfel so angeordnet werden müssen, dass ein Quader entsteht. Räumliches Denken ist dann wieder besonders erforderlich, wenn nun auch über die Anzahl der möglichen Quader reflektiert werden muss, die aus der dreischichtigen Würfelpyramide entstehen und ein Volumen von 600 cm^3 haben.

Der Erfolg bei der Berechnung des Volumens von Würfelpyramiden ist vor allem davon abhängig, ob die Anzahl der eingesetzten Würfel korrekt ermittelt wird. Im Kontext der Würfelpyramiden bietet es sich aber auch an, den Oberflächeninhalt zu thematisieren, um damit die Kompetenz *Oberflächeninhalt in Sachsituationen erkennen und berechnen* zu bedienen. Folgende Aufgabe illustriert diesen Anspruch.

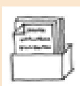


Aus Würfeln können „Würfelpyramiden“ gebaut werden. Bei jeder Würfelpyramide sind alle Schichten mit gleichgroßen Würfeln mit der Kantenlänge 1 cm ausgelegt. Eine dreischichtige Würfelpyramide (vgl. Abbildung) wurde vollständig in Farbe getaucht.

a) Begründe, dass die Anzahl der Seitenflächen der verwendeten Würfel insgesamt 210 beträgt.

b) Ermittle den Anteil der Seitenflächen, der nach dem Eintauchen in die Farbe nicht gefärbt ist.

Die Lösung der ersten Teilaufgabe ist recht naheliegend, wenn die Anzahl der verwendeten Würfel korrekt ermittelt wird. Gleichzeitig hat diese Teilaufgabe aber auch die Funktion einer Kontrolllösung, denn dadurch wird die Anzahl der Seitenflächen insgesamt angegeben, sodass trotz eines möglichen Scheiterns bei der Lösung dieser Teilaufgabe eine Bewältigung der zweiten Teilaufgabe gelingen kann. Um zur Lösung der zweiten Teilaufgabe zu gelangen, genügt es nicht, die Anzahl der Würfel je Schicht zu kennen, um dann auf die entsprechende Anzahl der Seitenflächen zu schlussfolgern. Erforderlich sind hier ein hervorragend ausgebildetes Raumvorstellungsvermögen und räumliches Denken, da in diesem Beispiel die Anzahl der gefärbten Seitenflächen je Würfel von 0 bis 5 variiert.

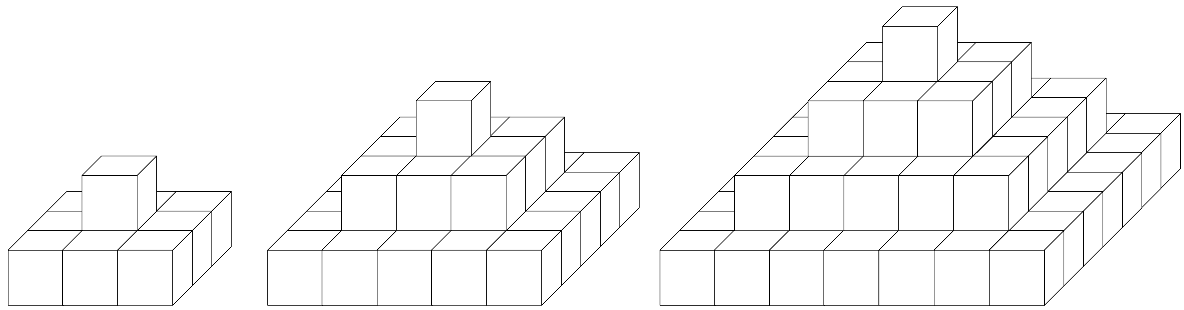


Würfel, Quader, Oberflächeninhalt, Volumen, Kanten, Kantenlänge, Seitenflächen, Bildungsvorschrift (zum Bauen von Würfelpyramiden): Schichten (z. B. zweischichtig, dreischichtig), Vollständigkeit, gleichgroß

3.6.2 AUFGABEN ZUR KOMPETENZÜBERPRÜFUNG

1. Aufgabe AFB III

Die Abbildung zeigt „Würfelpyramiden“. Alle Schichten dieser Würfelpyramiden sind vollständig mit gleichgroßen Würfeln ausgelegt.



Ermittle die Anzahl der für den Bau einer fünfschichtigen Würfelpyramide benötigten Würfel.

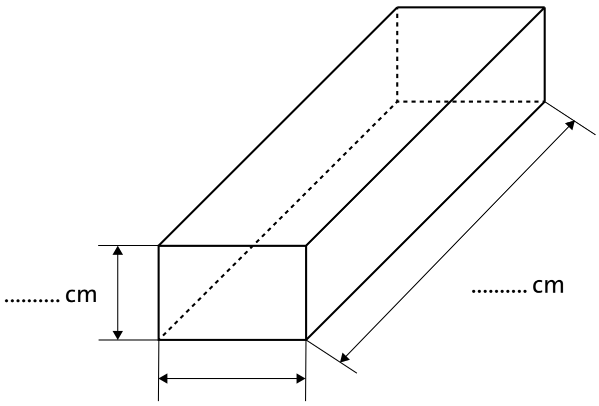
Quelle: ZKA 6 Mathematik 2016 (Gymnasium)

Ob die Schülerinnen und Schüler bereits befähigt sind, rein auf der Vorstellungsebene mit Körpern arbeiten zu können, wird durch die folgende Aufgabe gut geprüft. Zur Lösung der beiden Teilaufgaben bedarf es insbesondere der Fähigkeit des räumlichen Denkens, d. h. die Fähigkeit, mit Objekten – in diesem Beispiel mit Würfeln – in Gedanken zu operieren.

2. Aufgabe **AFB II/III**

Bei einem Geschicklichkeitsspiel wird der in der nebenstehenden Abbildung gezeigte Turm verwendet. Er besteht aus mehreren gleich großen quaderförmigen Bausteinen, ist 27 cm hoch und hat eine quadratische Grundfläche mit einem Umfang von 30 cm.

a) Ermittle die Kantenlängen eines Bausteins und trage die Maße in die Abbildung ein.



(Abbildung nicht maßstäblich)

b) Aus solchen Bausteinen wird ein Würfel mit einer Kantenlänge von 15 cm gebaut. Ermittle die Anzahl der für den Bau dieses Würfels benötigten Bausteine.

Quelle: ZKA 6 Mathematik Beispielarbeit (Gymnasium)

Um die erste Teilaufgabe erfolgreich bewältigen zu können, müssen die Beziehungen zwischen
» den beiden Abbildungen sowie
» den Abbildungen und dem Text

gefunden werden. Für die Berechnung der Höhe eines Bausteins ist es notwendig, dass aus dem Text die Höhe des Turmes entnommen und durch die Anzahl der Schichten dividiert wird. Dass

die dann noch fehlende Kantenlänge 7,5 cm beträgt, lässt sich zum Beispiel durch die spezielle Anordnung der Bausteine in den ersten beiden Schichten ableiten.
In der zweiten Teilaufgabe sind die Bausteine gedanklich nun so anzuordnen, dass ein Würfel mit einer Kantenlänge von 15 cm entsteht. Zur Bewältigung dieser Anforderungssituation kann die Abbildung des Turms unterstützend verwendet werden. Daraus kann gedanklich ein Turm gebaut werden, der aus 10 Schichten besteht und modelliert werden kann durch einen Quader mit den Kantenlängen 15 cm, 7,5 cm und 7,5 cm. Für diesen Quader werden insgesamt 30 Bausteine benötigt. Schließlich ist dann noch zu schlussfolgern, dass damit für den Bau des Würfels mit einer Kantenlänge von 15 cm noch weitere 90 Bausteine nötig sind, insgesamt also 120.

Die Aufgabe ist aber auch hervorragend für die Unterrichtsarbeit im Rahmen der Kompetenzentwicklung geeignet, da

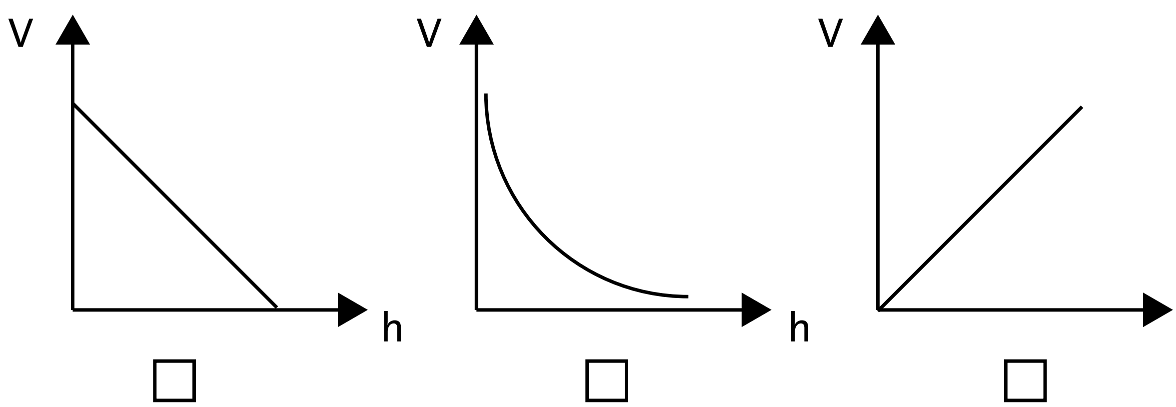
- sie für Schülerinnen und Schüler durch den gewählten Kontext des Geschicklichkeitsspiels motivierend ist,
- spielerisch alle allgemeinen mathematischen Kompetenzen gefördert werden können,
- sie vernetzend hinsichtlich der Leitideen ist,
- sich durch einfache Änderungen Differenzierungsaufgaben entwickeln lassen und
- sie durch die bewusste Zulassung oder Nichtzulassung von Hilfsmitteln den individuellen Voraussetzungen der Schülerinnen und Schüler gerecht werden kann.

In Ergänzung zu den obigen Aufträgen kann zum Beispiel die Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* beleuchtet werden, wie die folgende Aufgabe zeigt.

3. Aufgabe **AFB II/III**

Für alle Quader mit gleicher Grundfläche gilt: Wird die Höhe h verdoppelt, so verdoppelt sich auch das Volumen V.

a) Gib das Diagramm an, das diesen Sachverhalt darstellt.



b) Begründe, dass sich durch Verdreifachung der Höhe des Turms auch das Volumen verdreifacht.

Quelle: ZKA 6 Mathematik Beispielarbeit (Gymnasium)

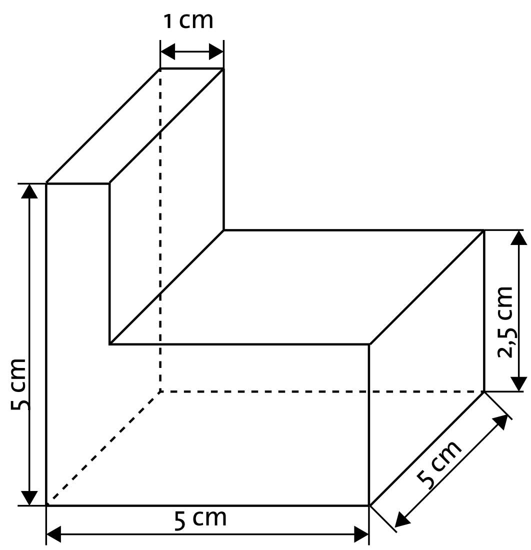
Im Kontext von Volumen und Oberflächeninhalt von Quadern können folgende Aufgaben gestellt werden:

» Ermittle das Volumen (bzw. den Oberflächeninhalt) eines solchen Quaders.
» Ermittle den von außen sichtbaren Anteil des Inhalts der Seitenflächen aller Quader, die für den Bau eines solchen Turms benötigt werden.
» Ermittle die Anzahl der Bausteine, die für den Bau eines Turms mit einem Volumen von 225 cm^3 benötigt werden. Beschreibe dein Vorgehen.
» Beurteile, ob sich mit diesen Bausteinen in gleicher Weise ein Turm mit einem Volumen von 675 cm^3 bauen lässt. Ermittle gegebenenfalls die Anzahl der dafür notwendigen Bausteine.

In Analogie zum Kontext „Würfelpyramide" kann auch die folgende in der zentralen Klassenarbeit 6 Mathematik 2008 (Gymnasium) eingesetzte Aufgabe genutzt werden.

4. Aufgabe **AFB III/II**

In der Abbildung ist ein aus Quadern zusammengesetzter Körper gegeben.



a) Zur Berechnung des Volumens stellt Paul folgenden Lösungsansatz auf.

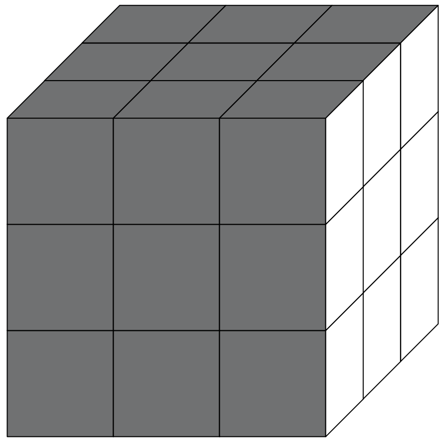
$$\mathbf{V = 5\,cm \cdot 5\,cm \cdot 5\,cm - 4\,cm \cdot 5\,cm \cdot 2{,}5\,cm}$$

Beschreibe, wie er darauf gekommen ist.

b) Schreibe einen anderen Lösungsansatz zur Berechnung des Volumens dieses zusammengesetzten Körpers auf.

Quelle: ZKA 6 Mathematik 2012 (Gymnasium)

5. Aufgabe AFB I/II



a) Fünf Seiten eines Würfels von 3 cm Kantenlänge werden grau angestrichen, die sechste Fläche bleibt ohne Anstrich.

Wie viel Prozent der Würfeloberfläche sind grau?

b) Der Würfel wird in Teilwürfel von 1 cm Kantenlänge zerlegt. Diese Teilwürfel werden in ein Gefäß gelegt, aus dem anschließend einer mit geschlossenen Augen entnommen wird.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat der entnommene Würfel keine, genau eine (zwei, drei, vier) grau angestrichene Fläche(n)?

Literaturverzeichnis/Praxisorientierte Beiträge

Grüßing, M. (2012): Räumliche Fähigkeiten und Mathematikleistung: Eine empirische Studie mit Schülerinnen und Schülern im 4. Schuljahr. Münster.

Kultusministerkonferenz (KMK) (2003): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. URL: https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf (abgerufen am: 27.03.2019).

Kuzle, A., & Etzold, H. (2017): Klipp Klapp – Würfelnetze einmal anders. Grundschulunterricht Mathematik, 1/2017, S. 29–32.

Ladel, S. & Kuzle, A. (2017): Einsatz virtueller Materialien zum Thema „Förderung des räumlichen Vorstellungsvermögens“ am Beispiel der App Klötzchen. In: Ladel, S. , Schreiber, C. & Rink, R.: Digitale Medien im Mathematikunterricht der Primarstufe. Ein Handbuch für die Lehrerausbildung, München. S. 131 – 148.

Landesinstitut für Schulqualität und Lehrerbildung Sachsen-Anhalt (2010): Zeichnerisches Darstellen im Mathematikunterricht: Skizzieren – Zeichnen – Konstruieren. URL: https://docplayer. org/38406188-Zeichnerisches-darstellen-immathematikunterricht-skizzieren-zeichnenkonstruieren.html (abgerufen am: 11.05.2020)

Ministerium für Bildung Sachsen-Anhalt (2012): Fachlehrplan Sekundarschule Mathematik. URL: https://lisa.sachsen-anhalt.de/fileadmin/Bibliothek/Politik_und_Verwaltung/MK/LISA/Unterricht/Lehrplaene/Sek/Anpassung/lp_sks_mathe_01_08_2019.pdf (abgerufen am: 11.05.2020)

Ministerium für Bildung Sachsen-Anhalt (2019): Fachlehrplan Gymnasium/Berufliches Gymnasium Mathematik. URL:https://lisa.sachsen-anhalt.de/fileadmin/Bibliothek/Politik_und_Verwaltung/MK/LISA/Unterricht/Lehrplaene/Gym/Anpassung/Mathematik_FLP_Gym_01_07_2019.pdf (zuletzt abgerufen am: 11.05.2020)

Senftleben, H.-G. (1996): Erkundungen zur Kopfgeometrie, Journal für Mathematikdidaktik, 17(1), S. 49–72.

Thielbeer, R. (2018): Symmetrie mit Tablets und Co. Praxis Grundschule 2 /2018, S. 20–31.

Thöne, B. & Lange J. (2016): Fotorallye in Geo-City. Raumvorstellung spielerisch fördern und geometrische Begriffe anwenden. Mathematik differenziert - Heft 1/2016, S. 24–33.

Witzel, F. & Thiel, O. (2016). Räumliches Denken fördern. Virtuelle 3-D-Modelle zum Konstruieren nutzen. Mathematik differenziert - Heft 3/2016, S. 10–15.

NOTIZEN

NOTIZEN